Sonderdruck

SCHRIFTENREIHE
DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK
BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN

HEFT 8

DIETER KLAUA

KONSTRUKTION GANZER, RATIONALER UND REELLER ORDINALZAHLEN UND DIE DISKONTINUIERLICHE STRUKTUR DER TRANSFINITEN REELLEN ZAHLENRÄUME

Berlin, Humboldt-Universität
Habilitationsschrift

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1961

Konstruktion ganzer, rationaler und reeller Ordinalzahlen
und die diskontinuierliche Struktur der transfiniten reellen Zahlenräume

SCHRIFTENREIHE
DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK
BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Herausgeber: Heinrich Grell, Josef Naas, Achilles Papapetrou, Hans Reichardt, Willi Rinow, Erhard Schmidt†, Kurt Schröder

In der Schriftenreihe sind bisher erschienen:

Heft 1: Der Begriff des Raumes in der Geometrie — Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik. *Mit Beiträgen von 28 Autoren herausgegeben von* J. NAAS *und* K. SCHRÖDER.

Heft 2: Lösung der allgemeinen Randwertprobleme für eindimensionale gedämpfte Wellen bei harmonischem Zeitgesetz *von* KARL BORKMANN *und* SIEGFRIED OBERLÄNDER.

Heft 3: Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen *von* A. W. POGORELOW.

Heft 4: Bemerkungen über die Stabilitätsuntersuchungen der Wirbelstraßen *von* BL. DOLAPTSCHIEW.

Heft 5: Die Verbiegung konvexer Flächen *von* A. W. POGORELOW.

Heft 6: Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen *von* A. M. JAGLOM.

Heft 7: Tabellen von Exponentialfunktionen und -Integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleitertheorie und Gaskinetik *von* SIEGFRIED OBERLÄNDER.

Heft 8: Konstruktion ganzer, rationaler und reeller Ordinalzahlen und die diskontinuierliche Struktur der transfiniten reellen Zahlenräume *von* DIETER KLAUA.

Heft 1–7 erschienen innerhalb der Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

HEFT 8 DER SCHRIFTENREIHE
DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

KONSTRUKTION GANZER, RATIONALER UND REELLER ORDINALZAHLEN UND DIE DISKONTINUIERLICHE STRUKTUR DER TRANSFINITEN REELLEN ZAHLENRÄUME

VON

DIETER KLAUA

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1961

906/62

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Institut für reine Mathematik, Berlin W 8, Otto-Nuschke-Straße 22/23

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

Alle Rechte vorbehalten · Copyright 1961 by Akademie-Verlag, Berlin

Lizenz-Nr. 202 · 100/695/61

Satz und Druck: Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg

Bestellnummer: 2069/8

Preis: DM 28,—

Printed in Germany

ES 19 B 1

INHALT

Einleitung 7

Kapitel I: Transfinite Zahlensysteme, transfinite algebraische Strukturen

§ 1 Natürliche Ordinalzahlen 13
§ 2 Ganze Ordinalzahlen 26
§ 3 Rationale Ordinalzahlen 44
§ 4 Reelle Ordinalzahlen 53

Kapitel II: Lineare Punktmengen

§ 5 Häufungspunkte 79
§ 6 Überdeckungssätze 82
§ 7 Abgeschlossene und offene Mengen 88
§ 8 Borelsche Mengen 93
§ 9 ω_σ-Basen 94
§ 10 Zusammenhang 97
§ 11 Algebraische Struktur der linearen Komponenten 106
§ 12 Topologische Struktur der linearen Komponenten 115

Kapitel III: Endlich-dimensionale Punktmengen, transfinite topologische Strukturen

§ 13 Häufungspunkte 124
§ 14 Überdeckungssätze 126
§ 15 Transfinite topologische Räume 128
§ 16 ω_σ-Basen 131
§ 17 Zusammenhang 133
§ 18 Algebraische Struktur der k-dimensionalen Komponenten 137
§ 19 Topologische Struktur der k-dimensionalen Komponenten 139

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543918_0005

EINLEITUNG[1])

Von den Systemen der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen sind bisher nur die natürlichen Zahlen ins Transfinite fortgesetzt worden. CANTOR erhielt bekanntlich durch transfinite Verallgemeinerung des Zählbegriffes die Ordinalzahlen und durch entsprechende Verallgemeinerung des Anzahlbegriffes die Kardinalzahlen.

In dieser Arbeit lösen wir im ersten Kapitel „Transfinite Zahlensysteme, transfinite algebraische Strukturen" das Problem, auch die übrigen Zahlensysteme derart ins Transfinite fortzusetzen, daß sich vernünftige algebraische Strukturen ergeben und das „niedere" System stets isomorph im „höheren" System enthalten ist. So werden die transfiniten ganzen Zahlen z. B. einen geordneten Ring mit Einselement bilden und die transfiniten rationalen und reellen Zahlen einen geordneten Körper. Durch Hinzufügen zusätzlicher (von unseren neuen Zahlen erfüllter) Axiome typisch transfiniter Natur zu den Ring- bzw. Körperaxiomen gelingt schließlich eine dem klassischen Fall analoge algebraische Charakterisierung der eingeführten transfiniten Zahlensysteme: Die transfiniten ganzen Zahlen sind charakterisiert als transfiniter minimaler geordneter Ring mit Einselement, die transfiniten rationalen Zahlen als transfiniter minimaler geordneter Körper und die transfiniten reellen Zahlen als transfiniter stetiger Körper. Ähnlich wie man durch Paarbildung aus den reellen Zahlen die komplexen Zahlen erhält, könnte man auch aus den transfiniten reellen Zahlen noch transfinite komplexe Zahlen bilden.

Der Ausgangspunkt für die Konstruktion der transfiniten Zahlensysteme sind die CANTORschen Ordinalzahlen, die wir jetzt *natürliche Ordinalzahlen* bzw. *transfinite natürliche Zahlen* nennen, worunter als Teilbereich die endlichen natürlichen Ordinalzahlen vorkommen, die *natürlichen Zahlen*. Durch Paarbildung im Bereich der natürlichen Ordinalzahlen und Einführung einer Äquivalenzrelation „Differenzengleichheit" sollen die *ganzen Ordinalzahlen* bzw. *transfiniten ganzen Zahlen* analog dem klassischen Fall erzeugt werden mit dem Teilbereich der endlichen ganzen Ordinalzahlen, der *ganzen Zahlen*. Zur Einführung der Differenzengleichheit braucht man eine absorptionsfreie Addition und eine ebensolche Multiplikation natürlicher Ordinalzahlen; die übliche Summe und das übliche Produkt von Ordinalzahlen eignen sich also nicht als Ausgangsoperationen. Wir konstruieren deshalb zunächst auf möglichst natürliche Art eine absorptionsfreie Addition von Ordinalzahlen; es zeigt sich, daß diese Addition äquivalent mit der

[1]) Diese Arbeit wurde an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Humboldt-Universität zu Berlin 1959 als Habilitationsschrift eingereicht. Über die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich im Rahmen des Berliner Mathematischen Kolloquiums, des Mathematischen Kolloquiums der Universität Greifswald und auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1959 in Münster vorgetragen.

HESSENBERGschen natürlichen Summe ist. Es liegt daher nahe, als Ausgangsmultiplikation das absorptionsfreie HESSENBERGsche natürliche Produkt zu wählen. Mit den HESSENBERGschen Operationen gelingt schließlich die Einführung der Differenzengleichheit und der Nachweis der gewünschten algebraischen Eigenschaften der ganzen Ordinalzahlen. Ähnlich den CANTORschen Normalformen für natürliche Ordinalzahlen lassen sich auch die ganzen Ordinalzahlen eindeutig in Normalform darstellen.

Nach dem klassischen Muster werden dann die *rationalen Ordinalzahlen* bzw. *transfiniten rationalen Zahlen* eingeführt mit dem Teilbereich der endlichen rationalen Ordinalzahlen, der *rationalen Zahlen*. Da die HESSENBERGschen Operationen für endliche Ordinalzahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen übereinstimmen, so stimmen auch die Addition und Multiplikation der ganzen und rationalen Ordinalzahlen für den endlichen Fall mit den bekannten Rechenoperationen im Bereich der ganzen bzw. rationalen Zahlen überein.

Die Einführung der *reellen Ordinalzahlen* bzw. *transfiniten reellen Zahlen* bereitet insofern Schwierigkeiten, als nicht, wie im klassischen Fall, alle möglichen DEDEKINDschen Schnitte im Bereich der rationalen Ordinalzahlen zur Bildung reeller Ordinalzahlen herangezogen werden können; es genügt nicht, von den Klasseneinteilungen der rationalen Ordinalzahlen nur diejenigen mit leerer Unter- oder Oberklasse auszuschließen. Man muß von den Klasseneinteilungen vielmehr noch die sogenannte HÖLDER-Bedingung fordern, wonach es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Zahl a der Unterklasse und eine Zahl b der Oberklasse gibt mit $b - a = \varepsilon$. Die klassischen DEDEKINDschen Schnitte im Bereich der rationalen Zahlen erfüllen diese Bedingung; mit der Einführung der transfiniten reellen Zahlen zeigt sich, daß diese Bedingung — und nicht die Nichtleerheit von Unter- und Oberklasse — die zentrale Eigenschaft der Klasseneinteilungen ist, worauf die Konstruktion sinnvoller reeller Ordinalzahlen (und damit auch der üblichen reellen Zahlen) beruht.

Indem man berücksichtigt, daß die Bereiche der Kardinal- und Ordinalzahlen hinsichtlich ihrer Wohlordnungen isomorph sind, könnte man — ausgehend von den Kardinalzahlen — ganze, rationale und reelle Kardinalzahlen bilden, wobei man einfach alle Konstruktionsprinzipien einschließlich der HESSENBERGschen Ausgangsoperationen von den Ordinalzahlen isomorph auf die Kardinalzahlen überträgt. Es entsteht dadurch nichts prinzipiell Neues. Außerdem müßte aber eine absorptionsfreie Addition „+“ für Kardinalzahlen im Hinblick auf den Zusammenhang mit der Nachfolgerbeziehung u. a. der Gleichung

$$1 + \aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_1$$

genügen, ist also vom kardinalzahltheoretischen Standpunkt aus inhaltlich sinnlos und hat keineswegs die Bedeutung einer vernünftigen absorptionsfreien Addition, wie das im ordinalen Bereich der Fall war. Es zeigt sich somit, daß die Einführung transfiniter Zahlensysteme nur inhaltlich sinnvoll ist, wenn man von den Ordinalzahlen ausgeht, die damit gegenüber den Kardinalzahlen einmal mehr ihre Vorrangigkeit kundtun.

Zur Vermeidung von Widersprüchen bei der Konstruktion der transfiniten Zahlensysteme stützen wir uns zumindest inhaltlich auf eine axiomatisierte Mengenlehre, und zwar verwenden wir als Axiomensystem einen algebraisierten

transfiniten Stufenkalkül.[1]) In diesem System gibt es dann zwei Sorten von Gesamtheiten von Dingen, die *Mengen* und die *Unmengen*, beide zusammen *Klassen* genannt. Die Unmengen sind sozusagen die widerspruchsvollen Mengen; man kann sie gerade noch als Begriffe bilden, kann aber nur in sehr beschränktem Maße mit ihnen operieren; sie sind z. B. nie Element einer anderen Klasse und besitzen keine Mächtigkeit.

Die Klassen der natürlichen, der ganzen und rationalen Ordinalzahlen sind solche Unmengen. Bei der Einführung der reellen Ordinalzahlen besäße also ein DEDEKINDscher Schnitt innerhalb der rationalen Ordinalzahlen Unmengen als Unter- und Oberklasse, würde somit als geordnetes Paar aus diesen beiden Klassen überhaupt nicht existieren. Es ergibt sich demnach die Notwendigkeit, von Anfang an neben der absoluten Klasse aller natürlichen Ordinalzahlen — ebenso bei den transfiniten ganzen und rationalen Zahlen — Teilklassen dieser Klasse zu betrachten, welche Mengen sind mit denselben strukturellen Eigenschaften wie die gesamte Klasse, so daß man dann auf diese die gesamte Klasse approximativ ausschöpfenden Teilstrukturen die Bildung der reellen Ordinalzahlen relativieren und damit überhaupt erst ermöglichen kann. Dies gelingt, wenn man statt von allen natürlichen Ordinalzahlen jeweils von der Menge aller natürlichen Ordinalzahlen unterhalb einer regulären Anfangszahl ω_σ ausgeht. Man erhält so neben den absoluten transfiniten natürlichen, ganzen und rationalen Strukturen noch die auf solche Anfangszahlen relativierten Strukturen, bei den reellen Ordinalzahlen nur diese relativierten Strukturen. Die Strukturen in bezug auf ω_0 sind dabei gerade die üblichen klassischen endlichen Strukturen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen, über denen sich jetzt eine Vielzahl weiterer transfiniter Zahlensysteme erhebt. Die Rolle der abzählbaren Folgen im Bereich der klassischen Analysis übernehmen im Zahlenbereich bezüglich ω_σ die Folgen vom Typ ω_σ.

Das zweite Kapitel dieser Arbeit, „Lineare Punktmengen", beschäftigt sich mit den topologischen Eigenschaften der relativ zu den regulären Anfangszahlen ω_σ konstruierten transfiniten reellen Zahlensysteme C_σ, wobei allerdings die Einführung transfiniter topologischer Strukturen auf das dritte Kapitel verschoben wird; dort erhalten wir gleich n-dimensionale Modelle dieser Strukturen.

Das System C_σ kann anschaulich als Zahlengerade gedeutet werden; C_0 ergibt die übliche klassische Zahlengerade. Die Addition innerhalb der Systeme C_σ mit $\sigma > 0$ ist dabei nicht-archimedisch. Jeder Punkt der Geraden C_σ läßt sich durch echt monotone transfinite rationale Fundamentalfolgen vom Typ ω_σ approximieren. In diesem Sinne kann man sagen, eine reelle Struktur C_σ ist feiner oder dichter als eine Struktur C_τ, sofern $\tau < \sigma$ gilt; denn ist $P \in C_\sigma \cap C_\tau$ (P sei z. B. eine transfinite rationale Zahl aus C_τ) und (P_n) eine echt monoton wachsende gegen P innerhalb C_τ konvergierende Folge transfiniter rationaler Zahlen $P_n \in C_\tau$ vom Typ ω_τ (es ist dann auch $P_n \in C_\sigma$), so ist der Abstand der Menge aller P_n von P in C_τ gleich 0, während er in C_σ größer als 0 ist und noch weitere transfinite rationale Elemente aus C_σ vor P eingeschoben werden können. Es gibt in C_σ zwischen zwei transfiniten rationalen Punkten $r_1 < r_2$ genau $\|\omega_\sigma\|$ ($\|\omega_\sigma\|$ sei die Kardinalzahl von ω_σ) viele transfinite rationale Elemente. Betrachtet man die absolute Klasse aller rationalen Ordinalzahlen, so bildet die Teilklasse der rationalen Ordinalzahlen

[1]) D. KLAUA, Ein Aufbau der Mengenlehre mit transfiniten Typen, formalisiert im Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Z. math. Logik Grundl. Math. **3** (1957), 303—316.

zwischen r_1 und r_2 sogar eine Unmenge, ist also von unvorstellbarer Dichte. Die Zahlengeraden C_σ werden aber mit wachsendem σ nicht nur dichter, sondern reziprok hierzu auf Grund der Körpereigenschaften der C_σ auch länger; das unendlich Ferne der Geraden C_σ erfährt bei wachsendem σ eine fortwährende Gliederung. Man kann in diesem Sinne auch statt von einer Verlängerung der Geraden C_σ von einer Verdichtung, einer Verfeinerung ihres unendlich Fernen sprechen.

Das Verhalten einer geometrischen Geraden G (als ein aus der räumlichen Anschauung heraus abstrahiertes ideales Gebilde) im unendlich Fernen wie im unendlich Kleinen läßt sich experimentell nicht nachprüfen. Man kann deshalb — wie wir es bereits getan haben — sämtliche reellen Strukturen C_σ als Zahlenmodelle von G heranziehen. C_0 ist das gröbste Modell, gefolgt von den immer feiner werdenden Modellen C_σ mit $\sigma > 0$; ein feinstes Modell gibt es nicht.

Beim Übergang vom System C_0 nach C_1 tritt ein grundlegender Wandel der topologischen Eigenschaften der betreffenden reellen Systeme ein; es ist dies der Wechsel von einem stetig zusammenhängenden Modell C_0 einer Geraden zu einem in eine Art Zahlenquanten aufgeteilten diskontinuierlichen Modell C_1. Die Systeme C_σ mit $\sigma > 1$ zeigen einen ähnlichen Aufbau wie C_1. Diese Diskontinuierlichkeit erhält man folgendermaßen: Führt man in C_σ den klassischen Zusammenhangsbegriff ein, so besteht C_0 aus einer einzigen Komponente (nämlich sich selbst), während C_σ bei $\sigma > 0$ jeden seiner Punkte als Komponente besitzt; der klassische Zusammenhangsbegriff ist also für die letzteren Systeme unzweckmäßig. Man führt deshalb allgemeiner den h-Zusammenhang (bei $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$) in C_σ ($\sigma \geqq 0$) ein, der inhaltlich gesehen auch solche Mengen noch zusammenhängend nennt, die Lücken aufweisen mit einem Durchmesser unterhalb h; für $h = 0$ ergibt sich der klassische Zusammenhang. Dieser h-Zusammenhang liefert in C_0 nichts Neues; denn für jedes $h \in C_0$, $h \geqq 0$ besteht C_0 nach wie vor aus genau einer Komponente, jeweils bezogen auf den zugrunde gelegten h-Zusammenhang. Beim Studium der topologischen Eigenschaften der klassischen Zahlengeraden C_0 ist also der neue relativierte Zusammenhangsbegriff völlig überflüssig. Anders liegen die Verhältnisse in den Systemen C_σ mit $\sigma > 0$. Hier gilt, daß C_σ für kein $h \geqq 0$ h-zusammenhängend ist und für jedes $h > 0$ in Komponenten zerfällt, welche offen und perfekt sind und keine Begrenzung besitzen. Der Durchmesser der h-Komponenten (bei festem h) ist gleich der oberen Grenze aller Zahlen $n \cdot h$ (n natürliche Zahl) und kann demnach mit fallendem h immer kleiner gemacht werden. Man erhält somit bei festem $\sigma > 0$ je nach Wahl des $h > 0$ eine mehr oder weniger feine Unterteilung in Komponenten mit den eben beschriebenen Eigenschaften, und die zu einem $h > 0$ gehörige Unterteilung besitzt hinsichtlich ihres Feinheitsgrades einen eindeutig bestimmten unmittelbaren Vorgänger (die nächstfeinere Unterteilung) und einen eindeutig bestimmten unmittelbaren Nachfolger (die nächstgröbere Unterteilung).

Die h-Komponenten ($h > 0$, fest) von C_σ ($\sigma \geqq 0$) lassen sich auf Grund ihrer obigen Eigenschaften als eine Art Zahlenquanten (bezüglich h) auffassen; sie stellen ja, anschaulich gesehen, Verdichtungsstellen innerhalb C_σ dar ohne fest umrissenen Rand. Dabei haben diese Verdichtungen alle dieselbe Ausdehnung, welche gleich der Mindestausdehnung der Lücken zwischen ihnen ist. Jede h-Komponente zerfällt für $0 < h^* < h$ weiter in h^*-Komponenten, wenn nur h^* hinreichend klein ist, nämlich kleiner als die untere Grenze aller $\frac{1}{n} \cdot h$ ($n > 0$

natürliche Zahl). Die h-Komponenten (h fest) von C_σ bilden u. a. hinsichtlich der Addition eine geordnete abelsche Gruppe und einen geordneten Vektorraum über dem Körper der rationalen Zahlen; sie bilden (bei $\sigma > 0$) einen topologischen Raum, der ein normaler HAUSDORFF-Raum mit (bei $h > 0$) erstem Abzählbarkeitsaxiom ist; sie bilden schließlich (bei $\sigma > 0$) eine topologische abelsche Gruppe.

Eine weitere anschauliche Deutung der h-Komponenten erhält man auf folgende Weise: Ist $h \in C_\sigma$ ($\sigma > 0$) mit $h \geqq 0$, und nennt man Punkte P_1, P_2 auf der Zahlengeraden C_σ „nicht unterscheidbar", falls sie voneinander höchstens um ein (endlich-) natürlichzahliges Vielfaches von h entfernt sind, so bildet die Beziehung „nicht unterscheidbar" eine Äquivalenzrelation, deren Abstraktionsklassen gerade die h-Komponenten von C_σ sind. Betrachtet man demnach Entfernungen zwischen nicht unterscheidbaren Punkten als „nicht meßbar", so kann man nur Entfernungen solcher Punkte messen, die in verschiedenen h-Komponenten gelegen sind, wobei Entfernungen von Punkten ein- und derselben h-Komponente beim Messen absorbiert werden. Zum Begriff des Ausmessens von Strecken selbst ist folgendes zu sagen: Versteht man innerhalb C_σ ($\sigma \geqq 0$) unter der „Ausmeßbarkeit bezüglich $h > 0$" einer Strecke $S \subseteq C_\sigma$ die Existenz einer Überdeckung $S \subseteq A$ und einer Unterdeckung $I \subseteq S$, wobei A und I (endlich-) rationale (von 0 verschiedene) Vielfache einer h-Einheitsstrecke sind, d. h. einer Strecke, die ganz in einer h-Komponente von C_σ gelegen ist, aber nicht in einer Komponente von C_σ kleineren Durchmessers, so sind genau diejenigen Strecken S bezüglich h ausmeßbar, welche ganz in h-Komponenten gelegen sind, aber nicht in Komponenten kleineren Durchmessers. Eine h-Einheitsstrecke (und jede beliebige Strecke auf C_σ ist für gewisse h eine h-Einheitsstrecke) ist also zu fein, um alle Strecken einer solchen Komponente von C_σ ausmessen (bezüglich h) zu können, welche einen größeren Durchmesser als die h-Komponenten hat, und zu grob, um irgendeine Strecke einer Komponente von C_σ ausmessen (bezüglich h) zu können, welche einen kleineren Durchmesser als die h-Komponenten hat. Nur durch diskontinuierlichen Übergang von einer h-Einheitsstrecke zu einer weit größeren bzw. kleineren h'-Einheitsstrecke — es muß $0 < n \cdot h < h'$ bzw. $0 < h' < \frac{1}{n} \cdot h$ sein für jede natürliche Zahl $n > 0$ — kann man in Komponenten, die einen größeren bzw. kleineren Durchmesser als die h-Komponenten haben, Strecken ausmessen (bezüglich h').

Der Begriff des h-Zusammenhanges liefert schließlich die Einsicht, daß in den Systemen C_σ mit wachsendem σ — also mit feiner werdender Struktur — immer mehr Lücken bzw. Sprünge auftreten. Am Anfang, in C_0, existieren überhaupt keine Sprünge; denn C_0 ist 0-zusammenhängend. Auf der klassischen Zahlengeraden C_0 ist mit anderen Worten die Strukturfeinheit — ausgedrückt durch ω_0 — so grob, daß für kein $h \geqq 0$ Sprünge entstehen können und damit stetiger Zusammenhang vorliegt. Man kann in diesem Sinne die klassische (makroskopische) Struktur C_0 auffassen als den stetig zusammenhängenden Grenzwert der transfiniten reellen (mikroskopischen) Strukturen C_σ mit $\sigma > 0$.

Im dritten Kapitel „Endlichdimensionale Punktmengen, transfinite topologische Strukturen" dieser Arbeit werden die bisher innerhalb der Systeme C_σ nur eindimensional durchgeführten topologischen Betrachtungen ins Mehrdimensionale übertragen. Die Gesamtheit C_σ^k aller k-Tupel reeller Ordinalzahlen aus C_σ

bildet dann einen transfinit-topologischen Raum vom Typ ω_σ, der ein normaler HAUSDORFF-Raum und ein transfinit-metrischer Raum vom Typ ω_σ ist. Dabei ist ein *transfinit-topologischer Raum vom Typ* ω_σ ein topologischer Raum, in dem der Durchschnitt jeder Menge $\mathfrak{M}$ offener Mengen mit $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$ offen ist; eine Struktur $[R, \varrho]$ ist ein *transfinit-metrischer Raum vom Typ* ω_σ, falls R eine Menge ist und ϱ eine Funktion, die jedem Paar $[x, y]$ aus R eindeutig eine reelle Ordinalzahl aus C_σ unter den üblichen Axiomen des metrischen Raumes zuordnet.

C_σ^k besitzt eine ω_σ-Basis, d. h. eine Basis der Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$. Sätze wie der LINDELÖFsche Überdeckungssatz, der LINDELÖFsche Satz über Kondensationspunkte, der Satz von BAIRE-HAUSDORFF über Folgen offener bzw. abgeschlossener Mengen oder der CANTOR-BENDIXSONsche Satz gelten in C_σ^k relativ zu ω_σ in derselben Form, wie sie in C_σ^k bezüglich ω_0 gelten. Die Betrachtungen über den h-Zusammenhang verlaufen in C_0^k genau so wie in C_σ. Die algebraische und topologische Struktur der h-Komponenten von C_σ^k ist analog der Struktur der h-Komponenten von C_σ, so daß man also jetzt auch diskontinuierliche analytische Modelle für den n-dimensionalen Raum zur Verfügung hat.

Die Darstellung ist mit Absicht sehr ausführlich gehalten, damit diese Monographie gleichzeitig als Einführung in das Gebiet der transfiniten reellen Zahlen dienen kann.

KAPITEL I

TRANSFINITE ZAHLENSYSTEME, TRANSFINITE ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

§ 1 Natürliche Ordinalzahlen

1. Die im Bereich der *natürlichen Ordinalzahlen* (d. h. der üblichen CANTORschen Ordinalzahlen) bestehende Anordnungsbeziehung „$<$“ ist bekanntlich eine irreflexive Wohlordnung; d. h., für natürliche Ordinalzahlen α, β, γ gilt:

$$\alpha \not< \alpha,$$
$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma,$$
$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha,$$

und jede nicht leere Klasse natürlicher Ordinalzahlen besitzt ein erstes Element[1]).

Aus diesen Eigenschaften folgt noch:

$$\alpha < \beta \to \beta \not< \alpha,$$

und von den drei Fällen $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ tritt stets genau einer ein.

Definiert man $\alpha \leqq \beta \underset{\text{Df}}{\leftrightarrow} \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$, womit also $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \leqq \beta \wedge \alpha \neq \beta$ gilt, so bildet „$\leqq$“ eine reflexive Wohlordnung im Bereich aller natürlichen Ordinalzahlen, d. h.:

$$\alpha \leqq \alpha,$$
$$\alpha \leqq \beta \wedge \beta \leqq \gamma \to \alpha \leqq \gamma,$$
$$\alpha \leqq \beta \wedge \beta \leqq \alpha \to \alpha = \beta,$$
$$\alpha \leqq \beta \vee \beta \leqq \alpha,$$

und jede nicht leere Klasse natürlicher Ordinalzahlen besitzt ein erstes Element.

2. Zu einer vernünftigen Arithmetik der natürlichen Ordinalzahlen und damit zu einer vernünftigen Ausgangsbasis für unsere transfiniten Zahlensysteme (ganze, rationale, reelle Ordinalzahlen) braucht man absorptionsfreie Operationen „$+$“ und „$\cdot$“, die im endlichen Fall mit den bekannten Operationen der natür-

---

[1]) $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ werden im folgenden als Abkürzungen verwendet für: nicht; und; oder (nicht ausschließendes); wenn, so; genau dann, wenn; für jedes; es gibt ein. $\varnothing$ bedeute die leere Menge. Von den „Funktoren“ $\leftrightarrow$, $\to$, $\vee$, $\wedge$, $\sim$ trennt — bezogen auf diese Reihenfolge — jeder vorhergehende stärker als jeder nachfolgende. Zum Beispiel bedeutet $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma : (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma) \to \alpha < \gamma$. Ein mit Punkten versehener Funktor trennt stärker als jeder nicht mit Punkten versehene Funktor. Zum Beispiel bedeutet $\alpha < \beta \,.\wedge.\, \beta < \gamma \to \alpha < \gamma : (\alpha < \beta) \wedge (\beta < \gamma \to \alpha < \gamma)$.

lichen Zahlen zusammenfallen. Die übliche Addition und Multiplikation natürlicher Ordinalzahlen — im folgenden mit „$\oplus$“ und „$\odot$“ bezeichnet — sind also ungeeignet. Wir konstruieren zunächst eine absorptionsfreie Addition. Hat man etwa $\alpha = \omega^2 \oplus 1$ und $\beta = \omega$, so wäre $\alpha \oplus \beta = \omega^2 \oplus \omega$; die 1 ist absorbiert worden. Absorptionsfrei müßte sich $\alpha + \beta = \omega^2 \oplus \omega \oplus 1$ ergeben, d. h., man streicht bei α von hinten den Teil α'' (hier 1), der von β absorbiert wird ($\alpha'' \oplus \beta = \beta$) und setzt ihn hinter $\alpha' \oplus \beta$ (wobei $\alpha = \alpha' \oplus \alpha''$): $\alpha + \beta = \alpha' \oplus \beta \oplus \alpha''$. Es kann nun sein, daß bei der Addition $\beta \oplus \alpha''$ auch wieder ein Teil β'' von β ($\beta = \beta' \oplus \beta''$) durch α'' absorbiert wird ($\beta'' \oplus \alpha'' = \alpha''$), wie etwa bei $\alpha = \omega^3 \oplus \omega$, $\beta = \omega^2 \oplus 1$; dann setzt man $\alpha + \beta = \alpha' \oplus \beta' \oplus \alpha'' \oplus \beta''$ usw. Wir werden sehen, daß dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.

Sind also α, β natürliche Ordinalzahlen, so definieren wir $\alpha + \beta$ folgendermaßen: Wir bilden die abzählbaren Folgen (σ_n), (α_n), (β_n) natürlicher Ordinalzahlen induktiv durch: $\sigma_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$; sind σ_n, α_n, β_n bekannt, so sei σ_{n+1} die kleinste Zahl σ mit $\alpha_n \oplus \beta_n = \sigma \oplus \beta_n$, $\alpha_{n+1} = \beta_n$, und β_{n+1} sei schließlich die eindeutig bestimmte Zahl γ mit $\alpha_n = \sigma_{n+1} \oplus \gamma$. Es ist stets $\beta_{n+1} \leqq \beta_n$. Wären alle $\beta_n \neq 0$, so wäre sogar $\beta_{n+1} < \beta_n$, was im Widerspruch steht zu der Tatsache, daß jede echt fallende Folge natürlicher Ordinalzahlen endlich ist. Also gibt es ein $\beta_n = 0$. Es sei N die kleinste natürliche Zahl n mit $\beta_n = 0$ und $S_k = \sum_{0}^{k+1} \sigma_\varkappa$[1]; dann definiere man

$$\alpha + \beta \underset{\mathrm{Df}}{=} S_N .$$

Seien jetzt $\xi = \sum_{i \leqq r} \omega^{\xi_i} \odot x_i$ und $\eta = \sum_{i \leqq s} \omega^{\eta_i} \odot y_i$ Cantorsche Normalformen und ist $\xi_r \geqq \eta_0$, so gibt es kein $\xi' < \xi$ mit $\xi' \oplus \eta = \xi \oplus \eta$. Außerdem gilt $\xi < \omega^\delta \leftrightarrow \xi \oplus \omega^\delta = \omega^\delta$. Aus diesen Sätzen folgt dann für $\alpha + \beta$ insgesamt: Es ist $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$. Ist $\alpha > 0$, $\beta > 0$ mit den Cantorschen Normalformen $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \odot a_i$; $\beta = \sum_{i \leqq n} \omega^{\beta_i} \odot b_i$, so ist $\alpha + \beta$ gleich der Summe aller Glieder von α und β, wobei man Glieder derselben Exponenten zusammenfaßt (mit dahintergeschriebenen Koeffizienten) und die Summanden nach fallenden Exponenten aufsummiert. $\alpha + \beta$ ist demnach gleich der Hessenbergschen natürlichen Summe, und es liegt nahe, als absorptionsfreie Ausgangsmultiplikation das natürliche Hessenbergsche Produkt zu wählen. Wir wenden uns somit zunächst den Hessenbergschen Operationen zu.

3. Jede natürliche Ordinalzahl $\alpha > 0$ ist eindeutig in der Cantorschen Normalform darstellbar:

$$\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \odot a_i \quad \text{mit} \quad \alpha \geqq \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_m \geqq 0, \quad 1 \leqq a_i < \omega, \quad 0 \leqq m < \omega .$$

Hat man eine endliche Summe $\sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \odot a_i$ mit natürlichen $a_i > 0$ und echt fallenden α_i, so ist diese gleich die Cantorsche Normalform des Summenwertes; denn wegen $\omega^0 = 1 > 0$, $\omega^1 = \omega > 1$ und $\omega^{\alpha_0} \geqq \omega \oplus \alpha_0 \geqq 0 \oplus \alpha_0 = \alpha_0$ für $\alpha_0 > 1$ ist allgemein $\omega^{\alpha_0} \geqq \alpha_0$, also $\sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \odot a_i \geqq \omega^{\alpha_0} \geqq \alpha_0$.

---

[1]) Σ_0 bedeutet die Summation im Sinne von $\oplus$.

Sind $\alpha > 0$, $\beta > 0$ natürliche Ordinalzahlen mit ihren Normalformen

$$\alpha = \sum_{i \leqq m}{}_0 \omega^{\alpha_i} \odot a_i, \quad \beta = \sum_{i \leqq n}{}_0 \omega^{\beta_i} \odot b_i,$$

so gibt es eine eindeutig bestimmte gemeinsame Darstellung in der Form:

$$\alpha = \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot m_k, \qquad \beta = \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot n_k$$

mit $\sigma_0 > \sigma_1 > \cdots > \sigma_q \geqq 0$, $0 \leqq m_k, n_k < \omega$, $0 \leqq q < \omega$, für jedes $k \leqq q$ ist $m_k \oplus n_k \neq 0$.

Dann definiert man die Hessenbergsche *natürliche Summe* $\alpha + \beta$ natürlicher Ordinalzahlen α, β zu:

$$\alpha + \beta \underset{\mathrm{Df}}{=} \begin{cases} \alpha, \text{ falls } \beta = 0, \\ \beta, \text{ falls } \alpha = 0, \\ \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot (m_k \oplus n_k), \text{ falls } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ und } \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot m_k, \\ \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot n_k \text{ die oben beschriebene gemeinsame Darstellung von } \alpha \\ \text{und } \beta \text{ ist.} \end{cases}$$

Satz 1.

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

(2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

(3) $\alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta$,

(4) $\alpha + 0 = \alpha$.

Beweis. (1) Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ trivial; es sei also nun $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Dann folgt die Behauptung aus: $m \oplus n = n \oplus m$ für natürliche m, n. (2) Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ trivial. Für $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ folgt die Behauptung aus: $m \oplus (n \oplus p) = (m \oplus n) \oplus p$ für natürliche m, n, p. (3) Wegen $\alpha_1 < \alpha_2$ muß $\alpha_2 > 0$ sein. Für $\beta = 0$ trivial. Für $\alpha_1 = 0$, $\beta > 0$ folgt die Gültigkeit von $\beta < \alpha_2 + \beta$ aus den Gesetzen: $\omega^\alpha \odot m < \omega^\alpha \odot n$ bei natürlichen m, n mit $m < n$; $\omega^\alpha \odot m < \omega^\beta$ bei natürlichem m und $\alpha < \beta$; $\alpha \oplus \beta_1 < \alpha \oplus \beta_2$ bei $\beta_1 < \beta_2$; $\alpha_1 \oplus \beta \leqq \alpha_2 \oplus \beta$ bei $\alpha_1 < \alpha_2$. Ist schließlich $\alpha_1 > 0, \beta > 0$ und ist $\alpha_1 = \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot m_k^1$, $\alpha_2 = \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k} \odot m_k^2$ die gemeinsame Darstellung von α_1, α_2, so gibt es wegen $\alpha_1 < \alpha_2$ ein eindeutig bestimmtes $k_0 \leqq q$, so daß $m_{k_0}^1 < m_{k_0}^2$ und $m_k^1 = m_k^2$ für alle $0 \leqq k < k_0$ gilt. Schiebt man die Normalformen von α_1 und α_2 nach der Definition der natürlichen Summe in die Normalform von β ein (bildet also $\alpha_1 + \beta$ und $\alpha_2 + \beta$), so erhält man über die vorhin angegebenen Gesetze die Behauptung $\alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta$. (4) ist trivial.

Aus Satz 1 folgt noch:

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2,$$
$$\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2,$$
$$\alpha + \beta = \alpha \to \beta = 0,$$
$$\alpha + \beta = 0 \to \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

Für natürliche Zahlen stimmt die eingeführte Addition mit der üblichen Addition natürlicher Zahlen überein. Es gilt aber z. B. nicht

$$\alpha < \beta \to \exists \gamma \alpha + \gamma = \beta$$

(etwa $\alpha = 1$, $\beta = \omega$); also werden später einmal die natürlichen Ordinalzahlen nicht identisch sein mit den nichtnegativen ganzen Ordinalzahlen, sondern es wird positive ganze Ordinalzahlen geben, die keine natürlichen Ordinalzahlen sind (z. B. $\omega - 1$).

Das HESSENBERGsche *natürliche Produkt* $\alpha \cdot \beta$ natürlicher Ordinalzahlen α, β wird definiert zu:

$$\alpha \cdot \beta \underset{\mathrm{Df}}{=} \begin{cases} 0, \text{ falls } \alpha = 0 \vee \beta = 0. \\ \sum_{0 \atop i \leqq m,\, j \leqq n} \omega^{\alpha_i + \beta_j} \odot a_i \odot b_j, \text{ falls } \alpha > 0,\ \beta > 0 \text{ mit den CANTORschen} \\ \text{Normalformen } \sum_{i \leqq m} {}_0\omega^{\alpha_i} \odot a_i,\ \sum_{j \leqq n} {}_0\omega^{\beta_j} \odot b_j \text{ und falls man in } \sum_{i \leqq m,\, j \leqq n} {}_0 \cdots \\ \text{Potenzen desselben Exponenten zusammenfaßt und nach fallenden Exponenten aufsummiert.} \end{cases}$$

Satz 2.

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \tag{1}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma, \tag{2}$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \tag{3}$$

$$\beta > 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta < \alpha_2 \cdot \beta, \tag{4}$$

$$\alpha \cdot 1 = \alpha, \tag{5}$$

$$\alpha \cdot 0 = 0. \tag{6}$$

Beweis. (1) Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ trivial; für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ folgt die Behauptung aus: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ und $a \odot b = b \odot a$ für natürliche a, b. (2) Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ trivial; für $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ folgt die Behauptung aus: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ und $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ für natürliche a, b, c. (3) Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ trivial; für $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ folgt die Behauptung aus: $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$ für natürliche a, b, c. (4) Wegen $\alpha_1 < \alpha_2$ ist $\alpha_2 > 0$. $\alpha_1 = 0$ ist trivial; es sei also nun $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta > 0$ mit der für α_1, α_2 gemeinsamen Darstellung $\alpha_1 = \sum_{k \leqq q} {}_0\omega^{\sigma_k} \odot m_k$, $\alpha_2 = \sum_{k \leqq q} {}_0\omega^{\sigma_k} \odot n_k$ $(m_k \oplus n_k > 0)$; außerdem sei $\beta = \sum_{i \leqq m} {}_0\omega^{\beta_i} \odot b_i$. Nach der Definition von „+“ ist dann auch $\beta = \sum_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} \odot b_i$. Nach (3) ist

$$\alpha_1 \cdot \beta = \sum_{i \leqq m} \alpha_1 \cdot (\omega^{\beta_i} \odot b_i) \quad \text{und} \quad \alpha_2 \cdot \beta = \sum_{i \leqq m} \alpha_2 \cdot (\omega^{\beta_i} \odot b_i).$$

Für $\alpha_1 \cdot \beta < \alpha_2 \cdot \beta$ braucht man also nach Satz 1 (3) nur zu zeigen: Für jedes $i \leqq m$ gilt $\alpha_1 \cdot (\omega^{\beta_i} \odot b_i) < \alpha_2 \cdot (\omega^{\beta_i} \odot b_i)$. Wir zeigen hierzu allgemein: Ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\gamma \geqq 0$ und $b \geqq 1$ eine natürliche Zahl, so gilt: $\alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot (\omega^\gamma \odot b) < \alpha_2 \cdot (\omega^\gamma \odot b)$. Ist $\alpha_1 < \alpha_2$, so gibt es in ihrer gemeinsamen Darstellung genau ein $k_0 \leqq q$ mit $m_{k0} < n_{k0}$ und $m_k = n_k$ für alle $0 \leqq k < k_0$.

Nach Definition von „$\cdot$“ ist $\alpha_1 \cdot (\omega^\gamma \odot b) = \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot m_k \odot b$, $\alpha_2 \cdot (\omega^\gamma \odot b) = \sum_{k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot n_k \odot b$. Es ist dabei $\sum_{k < k_0}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot m_k \odot b = \sum_{k < k_0}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot n_k \odot b$. Es ist also nur noch zu zeigen: $\sum_{k_0 \leqq k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot m_k \odot b < \sum_{k_0 \leqq k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot n_k \odot b$. Dafür genügt es wiederum zu zeigen: $\sum_{k_0 \leqq k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot m_k \odot b < \omega^{\sigma_{k_0} + \gamma} \odot n_{k_0} \odot b$. Für $k_0 < k \leqq q$ ist aber $\omega^{\sigma_k + \gamma} < \omega^{\sigma_{k_0} + \gamma}$, also

$$\sum_{k_0 \leqq k \leqq q}{}_0 \omega^{\sigma_k + \gamma} \odot m_k \odot b < \omega^{\sigma_{k_0} + \gamma} \odot (m_{k_0} \odot b \oplus 1) \leqq \omega^{\sigma_{k_0} + \gamma} \odot n_{k_0} \odot b$$

wegen $m_{k_0} < n_{k_0}$. (5) und (6) trival.

Aus Satz 2 folgt noch:

$$\begin{aligned} &\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 = \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2, \\ &\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2, \\ &\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta \ = \alpha \to \beta \ = 1, \\ &\qquad\qquad \alpha \cdot \beta \ = 1 \to \alpha \ = 1 \wedge \beta = 1, \\ &\qquad\qquad \alpha \cdot \beta \ = 0 \to \alpha \ = 0 \vee \beta = 0. \end{aligned}$$

Für natürliche Zahlen stimmt die eingeführte Multiplikation mit der üblichen Multiplikation natürlicher Zahlen überein.

4. Ist $\sum_{i \leqq m}{}_0 \omega^{\alpha_i} \odot a_i$ eine CANTORsche Normalform, so ist sofort:

$$\sum_{i \leqq m}{}_0 \omega^{\alpha_i} \odot a_i = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \cdot a_i.$$

Jede natürliche Ordinalzahl $\alpha > 0$ ist also eindeutig bis auf die Reihenfolge der Summanden darstellbar als endliche Summe $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \cdot a_i$, wo $0 \leqq m < \omega$, $1 \leqq a_i < \omega$ und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Ordnet man nach fallenden Exponenten, so nennen wir die Darstellung $\sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} \cdot a_i$ wieder die CANTORsche *Normalform* von α.

Satz 3. *Für jede natürliche Ordinalzahl γ gibt es nur endlich viele Paare $[\alpha, \beta]$ natürlicher Ordinalzahlen mit $\alpha + \beta = \gamma$.*

Beweis. Für $\gamma = 0$ trivial; es sei also $\gamma > 0$ mit der CANTORschen Normalform $\sum_{k \leqq q} \omega^{\sigma_k} \cdot c_k$. Für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ kann dann nur $\alpha = \sum_{k \leqq q} \omega^{\sigma_k} \cdot a_k$ und $\beta = \sum_{k \leqq q} \omega^{\sigma_k} \cdot b_k$ sein mit $a_k + b_k = c_k > 0$. Dies ist aber für festes k nur auf endlich viele Arten möglich.

Satz 4. *Für jede natürliche Ordinalzahl $\gamma > 0$ gibt es nur endlich viele Paare $[\alpha, \beta]$ natürlicher Ordinalzahlen mit $\alpha \cdot \beta = \gamma$.*

Beweis. Es muß $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sein. Die CANTORschen Normalformen von α, β, γ seien: $\gamma = \sum_{k \leqq q} \omega^{\sigma_k} c_k$, $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, $\beta = \sum_{j \leqq n} \omega^{\beta_j} b_j$; $\alpha \cdot \beta = \gamma$. Es muß notwendig $m \leqq q$ und $n \leqq q$ sein, da man sonst beim Ausmultiplizieren von α und β

mehr als q verschiedene Potenzexponenten erhält. Für $m,n \leqq q$ (es gibt nur endlich viele solcher Paare $[m, n]$) gibt es nur endlich viele Exponenten α_i für jedes $i \leqq m$ und nur endlich viele Exponenten β_j für jedes $j \leqq n$, so daß für $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$; und $\beta = \sum_{j \leqq n} \omega^{\beta_j} b_j$ das Produkt $\alpha \cdot \beta = \gamma$ ist; denn es muß ja für jedes Paar $[\alpha_i, \beta_j]$ ein σ_k geben mit $\alpha_i + \beta_j = \sigma_k$. Es gibt also insgesamt eine endliche Menge E natürlicher Ordinalzahlen, nur deren Elemente als Exponenten in den Normalformen der Faktoren α und β von γ auftreten können. Für $m,n \leqq q$ gibt es auch nur endlich viele Koeffizienten a_i für jedes $i \leqq m$ und Koeffizienten b_j für jedes $j \leqq n (1 \leqq a_i, b_j < \omega)$, so daß für $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$ und $\beta = \sum_{j \leqq n} \omega^{\beta_j} b_j$ das Produkt $\alpha \cdot \beta = \gamma$ ist; denn es muß ja für jedes Paar $[a_i, b_j]$ ein c_k geben mit $a_i \cdot b_j \leqq c_k$. Es gibt also insgesamt eine endliche Menge K natürlicher Zahlen, nur deren Elemente als Koeffizienten in den Normalformen der Faktoren α und β von γ auftreten können. Aus E und K kann man aber schließlich nur endlich viele CANTORsche Normalformen herstellen, also gibt es nur endlich viele Faktoren α und β von γ.

5. Wir wenden uns nun der Teilbarkeit der natürlichen Ordinalzahlen zu. α heißt *additiv unzerlegbar*, falls es keine $0 < \xi, \eta$ gibt mit $\xi + \eta = \alpha$; sonst *additiv zerlegbar*. Ist $\xi + \eta = \alpha$, so heißen ξ, η *Teile* von α. Es gilt:

$$\xi + \eta = \alpha \rightarrow \xi, \eta \leqq \alpha.$$

0 ist trivial additiv unzerlegbar.

Satz 5. *Die additiv unzerlegbaren natürlichen Ordinalzahlen $\alpha > 0$ sind genau die Zahlen $\alpha = \omega^\beta$.*

Beweis. ($\leftarrow$) Wenn $\xi + \eta = \omega^\beta$ und $\xi, \eta > 0$, so muß $\xi = \omega^\beta \cdot n$ und $\eta = \omega^\beta \cdot m$ (n, m natürliche Zahlen > 0) sein, also $\xi, \eta \geqq \omega^\beta$; Widerspruch. ($\rightarrow$) Ist $\alpha > 0$ eine additiv unzerlegbare Zahl mit $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, so muß $m = 0$ und $a_0 = 1$ sein, also $\alpha = \omega^\beta$ mit $\beta = \alpha_0$.

Satz 6. *Ist die additiv unzerlegbare natürliche Ordinalzahl p Teil der Summe $\xi + \eta$, so ist p Teil von ξ oder Teil von η.*

Beweis. $p = 0$ ist trivial, ebenso $\xi = 0$ oder $\eta = 0$. In den anderen Fällen sei $p = \omega^\alpha$ und in CANTORscher Normalform: $\xi = \sum_{i \leqq r} \omega^{\xi_i} x_i$, $\eta = \sum_{i \leqq s} \omega^{\eta_i} y_i$. Es muß dann in $\xi + \eta$ ein Summand der Form $\omega^\alpha a$ auftreten ($1 \leqq a < \omega$), also auch in ξ oder in η; mithin ist ω^α Teil von ξ oder von η.

Die eindeutige Darstellbarkeit natürlicher Ordinalzahlen $\alpha > 0$ in der CANTORschen Normalform läßt sich jetzt auch folgendermaßen ausdrücken: *Jede natürliche Ordinalzahl $\alpha > 0$ läßt sich bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig in eine (endliche) Summe von (endlichen) Vielfachen > 0 paarweise verschiedener additiv unzerlegbarer natürlicher Ordinalzahlen > 0 zerlegen.* Im Anschluß an diesen Darstellungssatz läßt sich eine Theorie des größten gemeinsamen Teiles und des kleinsten gemeinsamen Ganzen entwickeln.

α heißt *multiplikativ unzerlegbar* oder *Primzahl*, falls es keine $1 < \xi, \eta$ gibt mit $\xi \cdot \eta = \alpha$; sonst *multiplikativ zerlegbar*. Ist $\xi \cdot \eta = \alpha$, so heißen ξ, η *Teiler* von α. Es gilt: $\xi \cdot \eta = \alpha > 0 \rightarrow \xi, \eta \leqq \alpha$. 0 und 1 sind trivial multiplikativ unzerlegbar.

Satz 7. a) *Eine natürliche Ordinalzahl* α *mit der* CANTORschen *Normalform* $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, *für die* $\alpha_0 = \omega^\xi$ *ist, ist Primzahl genau dann, wenn* $m = 0$ *und* $a_0 = 1$ *ist oder wenn* $m > 0$ *und die Menge der* a_i $(0 \leqq i \leqq m)$ *teilerfremd ist.* b) *Eine natürliche Ordinalzahl* α *mit der* CANTORschen *Normalform* $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, *für die* $m > 0$ *ist, ist Primzahl, wenn die Menge der* a_i *teilerfremd ist und es einen Index* $0 \leqq j \leqq m$ *gibt mit:* $\alpha_j > 0$ *und kein* $\alpha_i (0 \leqq i \leqq m, i \neq j)$ *enthält einen von 0 verschiedenen Teil von* α_j *als Teil.* c) *Eine natürliche Ordinalzahl* α *mit der* CANTORschen *Normalform* $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, *für die* $m > 0$ *ist, ist Primzahl, wenn* α_1 *keinen von 0 verschiedenen Teil von* α_0 *als Teil enthält und die Menge der* a_i *teilerfremd ist.*

Beweis. a) (Unter der Teilerfremdheit der Menge der a_i verstehen wir, daß es keine natürliche Zahl > 1 gibt, die Teiler aller a_i ist.) $(\rightarrow)$ Trivial. $(\leftarrow)$ Wenn $m = 0$ und $a_0 = 1$, so ist $\alpha = \omega^{(\omega^\xi)}$; da ω^ξ additiv unzerlegbar ist, ist nie $\xi \cdot \eta = \alpha$ mit $1 < \xi, \eta$. Ist $m > 0$, so wäre bei $\xi \cdot \eta = \alpha : \xi = \omega^0 \cdot b = b \quad (1 < b < \omega)$; es müßte dann $\eta = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} c_i$ sein mit $c_i \cdot b = a_i$; dies ist wegen der Teilerfremdheit der Menge der a_i unmöglich. b) Es sei $\xi \cdot \eta = \alpha$; $\xi, \eta > 1$ und in CANTORscher Normalform: $\xi = \sum_{i \leqq p} \omega^{\xi_i} x_i$, $\eta = \sum_{i \leqq q} \omega^{\eta_i} y_i$. Wegen $m > 0$ muß $p > 0$ oder $q > 0$ sein; es sei etwa $p > 0$. Ist dann $q = 0$, so ist $\alpha = \xi \cdot \omega^{\eta_0} y_0$; ist $\eta_0 > 0$, so haben alle α_i einen von 0 verschiedenen Teil als gemeinsamen Teil, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist; ist $\eta_0 = 0$, so wären alle a_i durch y_0 teilbar $(y_0 > 1$, da sonst $\xi = 1)$, ebenfalls Widerspruch. Sei nun also $q > 0$. Dann gibt es zu α_j ein Paar $[\xi_k, \eta_l]$ $(0 \leqq k \leqq p,\ 0 \leqq l \leqq q)$ mit $\xi_k + \eta_l = \alpha_j$. Wegen $\alpha_j > 0$ muß $\xi_k > 0$ oder $\eta_l > 0$ sein; es sei etwa $\xi_k > 0$. Zu l gibt es aber ein $l' \neq 1$ (mit $0 \leqq l' \leqq q$); dann ist $\xi_k + \eta_{l'} = \alpha_i$ für ein $0 \leqq i \leqq m$ mit $i \neq j$, also hätte $\alpha_i (i \neq j)$ einen von 0 verschiedenen Teil ξ_k von a_j als Teil, Widerspruch. c) Es sei $\xi \cdot \eta = \alpha$; $\xi, \eta > 1$ und in CANTORscher Normalform: $\xi = \sum_{i \leqq p} \omega^{\xi_i} x_i$, $\eta = \sum_{i \leqq q} \omega^{\eta_i} y_i$. Für $\xi_0 = 0$ muß $1 < x_0 < \omega$ sein; also wäre jedes $a_i = y_i \cdot x_0$, Widerspruch zur Teilerfremdheit der Menge der a_i. Ganz analog ergibt sich $\eta_0 > 0$. Wegen $\xi_0 + \eta_0 = \alpha_0$ sind ξ_0, η_0 von 0 verschiedene Teile von α_0. Wegen $m > 0$ muß mindestens eine der Normalformen von ξ und η mindestens zwei Summanden enthalten; dies sei etwa die Normalform von η, also $\eta = \sum_{i \leqq q} \omega^{\eta_i} y_i$ mit $0 \leqq i \leqq q \geqq 1$. Dann muß aber $\alpha_1 = \xi_0 + \eta_1$ oder $\alpha_1 = \eta_0 + \xi_1$ sein, wo also ξ_0, η_0 von 0 verschiedene Teile von α_0 sind; Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus Satz 7a folgt: Ist in CANTORscher Normalform $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$ mit $\alpha_0 = \omega^\xi$, $a_0 = 1$, so ist α Primzahl. Aus Satz 7c folgt: Ist in CANTORscher Normalform $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, wobei $m > 0$ ist, die Menge der a_i teilerfremd ist und jeder von 0 verschiedene Teil von α_0 größer als α_1 ist (z. B. wenn $\alpha_1 = 0$ ist), so ist α Primzahl. Von Satz 7c gilt nicht die Umkehrung; z. B. ist $\omega^2 + \omega + 1$ Primzahl, ohne daß die aufgeführten Bedingungen gelten. Es genügt auch nicht, in der Formulierung von Satz 7c zu fordern: Es gibt ein α_i mit der Eigenschaft, wie sie von α_1 verlangt wurde; z. B. ist $(\omega^\omega + \omega^2)^2 = \omega^{2\omega} + 2\omega^{2+\omega} + \omega^4$, obwohl 4 keinen von 0 verschiedenen Teil von 2ω enthält und die a_i teilerfremd sind. In Satz 7b genügt es nicht, $\alpha_j \geqq 0$ zu fordern: $(\omega + 1)^2 = \omega^2 + 2\omega + 1$.

Das Beweisverfahren des EISENSTEINschen Irreduzibilitätskriteriums liefert den

Satz 8. *Eine natürliche Ordinalzahl α mit der* CANTORschen *Normalform*

$$\alpha = \sum_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} a_i$$

ist bis auf Faktoren $\omega^\xi a$ $(1 \leqq a < \omega)$ multiplikativ unzerlegbar, falls es eine endliche Primzahl p gibt mit

a) $a_0 \not\equiv 0(p^2)$, $a_i \equiv 0(p)$ *für* $0 \leqq i < n$, $a_n \not\equiv 0(p)$

oder b) $a_n \not\equiv 0(p^2)$, $a_i \equiv 0(p)$ *für* $0 < i \leqq n$, $a_0 \not\equiv 0(p)$.

Beweis. a) Es sei $\xi \cdot \eta = \alpha$ mit den CANTORschen Normalformen

$$\xi = \sum_{i \leqq r} \omega^{\xi_i} b_i, \quad \eta = \sum_{i \leqq s} \omega^{\eta_i} c_i.$$

Es ist $a_0 = b_0 \cdot c_0$; da $a_0 \equiv 0(p)$, so muß $b_0 \equiv 0(p)$ oder $c_0 \equiv 0(p)$ sein. Es sei etwa $b_0 \equiv 0(p)$; dann ist aber $c_0 \not\equiv 0(p)$ wegen $a_0 \not\equiv 0(p^2)$. Ist $s = 0$, so ist α durch einen Faktor $\omega^{\eta_0} c_0$ teilbar. Wir setzen also $s > 0$ voraus. Es können nicht alle b_i $(0 \leqq i \leqq r)$ durch p teilbar sein, da es sonst auch α wäre; also wäre jedes a_i $(0 \leqq i \leqq n)$ durch p teilbar, Widerspruch zu $a_n \not\equiv 0(p)$. i_0 sei das kleinste i mit $0 < i \leqq r$ und $b_i \not\equiv 0(p)$. Zu i_0 gibt es ein i_0' mit

$$a_{i_0'} = b_{i_0} \cdot c_0 + \text{Summe von Produkten } b_j \cdot c_k,$$

wo $j < i_0$, oder es ist

$$a_{i_0'} = b_{i_0} \cdot c_0.$$

Es ist $i_0' < n$ wegen $a_n = b_r c_s$ und $s > 0$. Wegen $i_0' < n$ ist aber $a_{i_0'} \equiv 0(p)$; ebenso ist $b_j c_k \equiv 0(p)$, da für $j < i_0$ gilt: $b_j \equiv 0(p)$; es muß also $b_{i_0} c_0 \equiv 0(p)$ sein. Da $c_0 \not\equiv 0(p)$, muß schließlich $b_{i_0} \equiv 0(p)$ sein im Widerspruch zu $b_{i_0} \not\equiv 0(p)$. b) beweist sich dual zu a).

Setzt man im obigen Satz noch voraus, daß die Menge der a_i $(0 \leqq i \leqq n)$ teilerfremd ist und es kein $\xi > 0$ gibt, welches gemeinsamer Teil aller α_i $(0 \leqq i \leqq n)$ ist, so ist α Primzahl.

Satz 9. *Jede natürliche Ordinalzahl $\alpha > 1$ ist ein endliches Produkt von Primzahlen > 1.*

Beweis. Ist $\alpha > 1$, so gibt es höchstens endlich viele Paare $[\xi, \eta]$ mit $\xi \cdot \eta = \alpha$; also hat α höchstens endlich viele Teiler. Wegen $1 \cdot \alpha = \alpha$ gibt es wenigstens einen Teiler > 1 von α. Man bestimme den kleinsten Teiler $\alpha_1 > 1$ von α; α_1 ist Primzahl; dann bestimme man den kleinsten Teiler $\alpha_2 > 1$ von β_1, falls $\alpha_1 \cdot \beta_1 = \alpha$ und $\beta_1 > 1$ ist; α_2 ist Primzahl; usw. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten mit einem $\beta_n = 1$ ab, da es nur endlich viele Teiler von α gibt. Dann ist

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n,$$

wo die α_ν Primzahlen sind.

Faßt man in diesem Satz dieselben Primzahlen zu Potenzen zusammen, so erhält man: *Jede natürliche Ordinalzahl $\alpha > 1$ läßt sich in ein endliches Produkt von endlichen Potenzen paarweise verschiedener Primzahlen > 1 zerlegen.*

Satz 10. *Ist die Primzahl $p = \omega^a a$ $(1 \leqq a < \omega)$ Teiler des Produktes $\xi \cdot \eta$, so ist p Teiler von ξ oder Teiler von η.*

Beweis. $p = 1$ ist trivial, ebenso $\xi = 0$ oder $\eta = 0$. Es sei also $p > 1$; $\xi > 0$, $\eta > 0$ mit den CANTORschen Normalformen $\xi = \sum_{i \leqq r} \omega^{\xi_i} x_i$, $\eta = \sum_{i \leqq s} \omega^{\eta_i} y_i$. Für p unterscheiden wir zwei Fälle: (1) $a = 1$ und $\alpha = \omega^\beta$ (d. h. α additiv unzerlegbar), (2) $\alpha = 0$ und a endliche Primzahl > 1. Ist im Falle (1) $\omega^{(\omega^\beta)}$ Teiler von $\xi \cdot \eta$, so muß jeder Exponent $\xi_\varrho + \eta_\sigma$ als Teil ω^β enthalten, also muß ω^β Teil von ξ_ϱ oder von η_σ sein. Ist ω^β Teil jedes ξ_ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq r)$, so ist ξ durch $\omega^{(\omega^\beta)}$ teilbar. Gibt es andererseits ein ξ_{ϱ_0}, welches nicht ω^β als Teil hat, so muß für jedes η_σ gelten: $\xi_{\varrho_0} + \eta_\sigma$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ hat ω^β als Teil; also ist η durch $\omega^{(\omega^\beta)}$ teilbar. Ist im Fall (2) a Teiler von $\xi \cdot \eta$, so ist a Teiler jedes Koeffizienten a_i in der CANTORschen Normalform $\sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$ von $\xi \cdot \eta$. Sind alle x_ϱ durch a teilbar, so ist ξ durch a teilbar. Gibt es andererseits ein erstes x_{ϱ_0}, welches nicht durch a teilbar ist, so gibt es hierzu ein a_{i_0}, so daß

$$a_{i_0} = x_{\varrho_0} \cdot y_0$$

oder

$$a_{i_0} = x_{\varrho_0} \cdot y_0 + \text{Summe von Produkten } x_\varrho \cdot y_\sigma$$

mit $0 \leqq \varrho < \varrho_0$. Da a_{i_0} und x_ϱ $(0 \leqq \varrho < \varrho_0)$ durch a teilbar sind und x_{ϱ_0} nicht, muß y_0 durch a teilbar sein. Sind $y_0, y_1, \ldots, y_n$ durch a teilbar $(0 \leqq n < s)$, so gibt es ein $a_{i_{n+1}}$, so daß

$$a_{i_{n+1}} = x_{\varrho_0} \cdot y_{n+1}$$

oder

$$a_{i_{n+1}} = x_{\varrho_0} \cdot y_{n+1} + \text{Summe von Produkten } x_\varrho \cdot y_\sigma$$

mit $0 \leqq \varrho < \varrho_0$ oder $0 \leqq \sigma \leqq n$. Da $a_{i_{n+1}}$ und die $x_\varrho y_\sigma$ $(0 \leqq \varrho < \varrho_0$ oder $0 \leqq \sigma \leqq n)$ durch a teilbar sind und x_{ϱ_0} nicht, muß auch y_{n+1} durch a teilbar sein. Also sind alle y_σ $(0 \leqq \sigma \leqq s)$ durch a teilbar, also η durch a teilbar.

Satz 11. *Jede natürliche Ordinalzahl $\xi = \omega^\alpha a > 1$ $(1 \leqq a < \omega)$ läßt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig in ein endliches Produkt endlicher Potenzen paarweise verschiedener Primzahlen > 1 zerlegen.*

Beweis. Eine Primzahlzerlegung von ξ kann nur Primfaktoren der Form $\omega^\beta b \geqq 1$ $(1 \leqq b < \omega)$ enthalten. Hieraus und aus Satz 10 folgt die Behauptung wie im klassischen endlichen Fall der Zahlentheorie.

Satz 12. *Jede nicht leere Menge von 0 verschiedener natürlicher Ordinalzahlen besitzt einen größten gemeinsamen Teiler; dividiert man jede Zahl der Menge durch denselben, so ist die daraus entstehende Menge natürlicher Ordinalzahlen teilerfremd.*

Beweis. Da jede natürliche Ordinalzahl $\alpha > 0$ nur endlich viele Teiler hat, gibt es auch nur endlich viele gemeinsame Teiler der Menge, also — da 1 jede

Zahl teilt — auch einen größten gemeinsamen Teiler dieser Menge. Existierte nach Division durch den größten gemeinsamen Teiler noch ein gemeinsamer Teiler >1, so wäre dies ein Widerspruch zum Begriff des größten gemeinsamen Teilers.

6. Mit N bezeichne man die Klasse aller natürlichen Ordinalzahlen. Gemäß der Anordnungsbeziehung „$<$“ besitzt jedes $\alpha \in N$ genau einen unmittelbaren Nachfolger $\alpha' \in N$; es ist $\alpha' = \alpha + 1$. $\lambda \in N$ heiße *natürliche Limeszahl*, falls es kein $\alpha \in N$ gibt mit $\alpha' = \lambda$; also ist auch $\lambda = 0$ eine natürliche Limeszahl. $\xi \in N$ ist eine *isolierte natürliche Ordinalzahl*, falls $\xi = 0$ ist oder es ein $\alpha \in N$ gibt mit $\alpha' = \xi$; ξ heißt *regulär*, falls ξ nicht der Limes (als Supremum aufgefaßt) einer Folge $(\xi_\nu)_{\nu<\alpha}$ vom Typ $\alpha < \xi$ ist mit $\xi_\nu < \xi \cdot \xi$ heißt *singulär*, falls ξ nicht regulär ist. Jede Anfangszahl ω_σ mit isoliertem σ ist regulär.

In Anlehnung an den klassischen endlichen Fall gilt bekanntlich das Peanosche Axiomensystem für natürliche Ordinalzahlen:

(1) *Alle natürlichen Limeszahlen λ sind Elemente von N.*
(2) *Zu jedem $\alpha \in N$ gibt es genau einen unmittelbaren Nachfolger $\alpha' \in N$.*
(3) *Die natürlichen Limeszahlen λ sind nicht unmittelbare Nachfolger von Elementen $\alpha \in N$.*
(4) *Jedes $\alpha \in N$ ist unmittelbarer Nachfolger höchstens eines $\beta \in N$.*
(5) *N ist Teilklasse einer jeden Klasse N^*, die alle natürlichen Limeszahlen enthält und mit einem $\alpha \in N$ auch α'.*

Wir zeigen jetzt, daß die natürlichen Ordinalzahlen durch diese Axiome bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt sind. Dazu definieren wir:

M, Λ, F bilden ein *transfinites* Peano-*System* genau dann, wenn gilt: M ist eine Klasse, F ist eine Funktion $F \subseteq M \times M$, Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi \in N}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern; es gelten die Axiome:

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für jedes $\xi \in N$.
(2) Zu jedem $x \in M$ gibt es genau ein $y \in M$ mit $y = F(x)$.
(3) Für jedes Λ_ξ $(\xi \in N)$ gilt: Es gibt kein $x \in M$ mit $\Lambda_\xi = F(x)$.
(4) Für jedes $y \in M$ gibt es höchstens ein $x \in M$ mit $y = F(x)$.
(5) Voraussetzung. M^* Klasse, $\Lambda_\xi \in M^*$ $(\xi \in N)$, $x \in M \cap M^* \to F(x) \in M^*$.
Behauptung. $M \subseteq M^*$.

Hilfssatz 1. *Bilden M, Λ, F ein transfinites* Peano-*System, so gibt es zu jedem $x \in M$ genau ein Paar $[\eta, n]$ mit: $\eta \in N$, n natürliche Zahl; es gibt $x_\nu \in M$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$, so daß $x_{\nu+1} = F(x_\nu)$ für $0 \leqq \nu < n$ ist und $x_0 = \Lambda_\eta$, $x_n = x$ ist.*

Beweis. Ist $x = \Lambda_\xi$, so muß $n = 0$ sein, da sonst $x = \Lambda_\xi = x_n = F(x_{n-1})$ im Widerspruch zu Axiom (3); dann muß aber auch $\eta = \xi$ sein, also $[\eta, n] = [\xi, 0]$. Es gebe nun für $x \in M$ genau ein solches Paar $[\eta, n]$; dann gibt es auch für $F(x)$ genau ein solches Paar, und zwar $[\eta, n+1]$. $[\eta, n+1]$ ist zunächst ein gewünschtes Paar für $F(x)$; gäbe es noch ein solches Paar $[\bar\eta, m]$, so muß $m > 0$ sein, da sonst $\Lambda_{\bar\eta} = \bar x_0 = \bar x_m = F(x)$ ist im Widerspruch zu Axiom (3). Ist nun $m > 0$ und $m \neq n+1$, so wäre also $\bar x_m = F(x) = x_{n+1}$ und $[\eta, n]$ und $[\bar\eta, m-1]$ wären nach Axiom (4) solche Paare für x; also muß $n = m-1$ oder $m = n+1$ sein. Sind aber $[\eta, n+1]$ und $[\bar\eta, n+1]$ solche Paare für $F(x)$, so sind $[\eta, n]$, $[\bar\eta, n]$ solche Paare für x; also muß $\bar\eta = \eta$ sein.

Hilfssatz 2. *Bilden M, Λ, F ein transfinites* PEANO-*System, so gibt es zu jedem Paar $[\eta, n]$, wobei $\eta \in N$ und n eine natürliche Zahl ist, genau ein $x \in M$ mit: Es gibt $x_\nu \in M$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$, so daß $x_{\nu+1} = F(x_\nu)$ für $0 \leqq \nu < n$ ist und $x_0 = \Lambda_\eta$, $x_n = x$ ist.*

Beweis. Wir zeigen gleich mehr: Zu jedem Paar $[\eta, n]$ gibt es genau ein $(n+1)$-Tupel $[x_0, \ldots, x_n]$ mit $x_\nu \in M$, $x_{\nu+1} = F(x_\nu)$, $x_0 = \Lambda_\eta$. Für $[\eta, 0]$ ist die Behauptung trivial. Gilt die Behauptung bei festem η für die natürliche Zahl n, so auch für $n+1$; denn wären für $[\eta, n+1]$ die Tupel $[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ und $[\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]$ solche $(n+1)$-Tupel, so wäre $[x_0, \ldots, x_n] = [\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n]$ nach Induktionsvoraussetzung, also $x_{n+1} = F(x_n) = F(\bar{x}_n) = \bar{x}_{n+1}$.

Satz 13. *Bilden M, Λ, F ein transfinites* PEANO-*System, so gibt es genau eine Wohlordnung $\lessdot$ in M, deren Abschnitte Mengen sind und für die gilt:*

$$\Lambda_\xi \lessdot \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta, \quad x \in M \to x' = F(x)$$

($x' =$ unmittelbarer Nachfolger von x bezüglich $\lessdot$).

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $\underset{1}{\lessdot}$ und $\underset{2}{\lessdot}$ solche Wohlordnungen, dann ist zunächst $\Lambda_\xi \underset{1}{\lessdot} \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta \leftrightarrow \Lambda_\xi \underset{2}{\lessdot} \Lambda_\eta$. Ist $\Lambda_\xi \underset{1}{\lessdot} x \leftrightarrow \Lambda_\xi \underset{2}{\lessdot} x$, so gilt auch $\Lambda_\xi \underset{1}{\lessdot} x' \leftrightarrow \Lambda_\xi \underset{2}{\lessdot} x'$; denn wenn $\Lambda_\xi \underset{1}{\lessdot} x'$, so $\Lambda_\xi \underset{1}{\leqq} x$, also $\Lambda_\xi \underset{2}{\leqq} x$, also $\Lambda_\xi \underset{2}{\lessdot} x' = x' = F(x)$. Wir haben damit insgesamt für Λ_ξ bewiesen:

$$\bigvee y \, (\Lambda_\xi \underset{1}{\lessdot} y \leftrightarrow \Lambda_\xi \underset{2}{\lessdot} y).$$

Ist aber $\bigvee y \, (x \underset{1}{\lessdot} y \leftrightarrow x \underset{2}{\lessdot} y)$, so gilt auch $\bigvee y \, (x' \underset{1}{\lessdot} y \leftrightarrow x' \underset{2}{\lessdot} y)$; denn wenn $x' \underset{1}{\lessdot} y$, so $x \underset{1}{\lessdot} y$, also $x \underset{2}{\lessdot} y$, also $x' \underset{2}{\leqq} y$, also wegen $x' = x' = F(x)$ auch $x' \underset{2}{\leqq} y$; wegen $x' \underset{1}{\lessdot} y$ ist aber $x' \neq y$, also schließlich $x' \underset{2}{\lessdot} y$. Wir haben also

$$\bigvee x \bigvee y \, (x \underset{1}{\lessdot} y \leftrightarrow x \underset{2}{\lessdot} y).$$

Existenz: Mit $[\eta_x, n_x]$ bezeichne man das nach Hilfssatz 1 dem $x \in M$ eindeutig zugeordnete Paar $[\eta, n]$. Wir definieren dann $\lessdot$ folgendermaßen:

$$x \lessdot y \leftrightarrow \eta_x < \eta_y \vee (\eta_x = \eta_y \wedge n_x < n_y).$$

$\lessdot$ ist eine irreflexive Wohlordnung: Es ist nicht $x \lessdot x$, da $\eta_x = \eta_x \wedge n_x = n_x$. Es ist $x_1 \lessdot x_2 \wedge x_2 \lessdot x_3 \to x_1 \lessdot x_3$; denn wenn

$$\eta_{x_1} < \eta_{x_2} \vee (\eta_{x_1} = \eta_{x_2} \wedge n_{x_1} < n_{x_2})$$

und

$$\eta_{x_2} < \eta_{x_3} \vee (\eta_{x_2} = \eta_{x_3} \wedge n_{x_2} < n_{x_3}),$$

so ist sofort auch $\eta_{x_1} < \eta_{x_3} \vee (\eta_{x_1} = \eta_{x_3} \wedge n_{x_1} < n_{x_3})$.

Es ist $x_1 \lessdot x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 \lessdot x_1$;

denn wenn $x_1 \neq x_2$, so gilt nach Hilfssatz 2 auch nicht $\eta_{x_1} = \eta_{x_2} \wedge n_{x_1} = n_{x_2}$, also $\eta_{x_1} \neq \eta_{x_2} \vee n_{x_1} \neq n_{x_2}$. Jede nicht leere Klasse $K \subseteq M$ besitzt ein erstes

Element; denn die Klasse aller η_x für $x \in K$ besitzt ein kleinstes η_0; n_0 sei die kleinste natürliche Zahl, so daß das durch das Paar $[\eta_0, n_0]$ nach Hilfssatz 2 bestimmte Element $x_0 \in M$ in K liegt. Dann ist x_0 kleinstes Element von K; denn wenn $x \in K$, so ist $\eta_0 \leqq \eta_x$ und wenn $\eta_0 = \eta_x$, so ist $n_0 \leqq n_x$. Damit ist schließlich $\prec$ eine irreflexive Wohlordnung in M. Es gilt $\Lambda_\xi \prec \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta$; denn $\Lambda_\xi \prec \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta \vee (\xi = \eta \wedge 0 < 0)$. Es ist $x \in M \to x' = F(x)$. Wir zeigen hierzu, daß $F(x)$ ein unmittelbarer Nachfolger von x bezüglich $\prec$ ist: Es ist $[\eta_{F(x)}, n_{F(x)}] = [\eta_x, n_x + 1]$ nach Hilfssatz 1, also $x \prec F(x)$. Wäre nun $x \prec y \prec F(x)$, so wäre $\eta_x \leqq \eta_y \leqq \eta_{F(x)} = \eta_x$, also $\eta_y = \eta_x$; dann muß aber wegen $x \prec y \prec F(x)$ und $\eta_y = \eta_x = \eta_{F(x)}$ gelten: $n_x < n_y < n_{F(x)} = n_x + 1$, was unmöglich ist. Also ist $x' = F(x)$. Zum Schluß ist noch zu zeigen, daß die Abschnitte von M bezüglich $\prec$ Mengen sind. Zu jedem $\eta \in N$ gibt es genau abzählbar viele $y \in M$ mit $\eta_y = \eta$, sie mögen die Mengen M_η bilden. Ist nun $a \in M$, so gilt für $x \in A_a$ (Abschnitt von a in M bezüglich $\prec$):

$$x \in A_a \leftrightarrow x \prec a \leftrightarrow \eta_x < \eta_a \vee (\eta_x = \eta_a \wedge n_x < n_a);$$

also $x \in A_a \to \eta_x \leqq \eta_a$. Dann ist aber $A_a \subseteq \bigcup_{\eta \leqq \eta_a} M_\eta$, wobei die Klasse $\mathfrak{M}$ aller M_η $(\eta \leqq \eta_a)$ eine Menge ist, da $\mathfrak{M}$ äquivalent der Menge aller η mit $\eta \leqq \eta_a$ ist. A_a ist demnach Teilklasse einer Menge und damit selbst Menge.

Satz 14 (Isomorphiesatz). *Bilden M_1, Λ_1, F_1 und M_2, Λ_2, F_2 transfinite* Peano*-Systeme, so sind diese Systeme isomorph; d. h., es gibt eine eineindeutige Abbildung φ von M_1 auf M_2 mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \quad \text{für} \quad \xi \in N \quad \text{und} \quad \varphi(F_1(x)) = F_2(\varphi(x)).$$

Beweis. Nach Satz 13 sind über M_1 Definitionen durch transfinite Induktion gestattet. Es existiert dann die eindeutig bestimmte Funktion φ von M_1 in M_2 mit $\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi}$, $\varphi(F_1(x)) = F_2(\varphi(x))$. Es ist nur noch zu zeigen, daß φ eineindeutige Funktion von M_1 auf M_2 ist. Dies folgt durch transfinite Induktion über M_2: Wäre $\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \varphi(x_1) = \Lambda_{2\xi}$, so kann nach Konstruktion der Folgen Λ_1 und Λ_2 nie $x_1 = \Lambda_{1\eta}$ sein mit $\xi \neq \eta$. Ist $x_1 \neq \Lambda_{1\eta}$ für alle $\eta \in N$, so hat x_1 einen Vorgänger y_1: $x_1 = F_1(y_1)$; dann ist

$$\varphi(x_1) = \varphi(F_1(y_1)) = F_2(\varphi(y_1)),$$

also hat $\varphi(x_1)$ einen Vorgänger in M_2, also $\varphi(x_1) \neq \Lambda_{2\xi}$, Widerspruch; jedes $\Lambda_{2\xi}$ hat also ein eindeutiges Urbild in M_1. Habe nun $x_2 \in M_2$ ein eindeutiges Urbild $x_1 \in M_1$, dann ist doch $\varphi(F_1(x_1)) = F_2(\varphi(x_1)) = F_2(x_2)$. Es hat also $F_2(x_2)$ mindestens das Urbild $F_1(x_1)$ in M_1. Hätte $F_2(x_2)$ noch ein Urbild $y_1 \in M_1$, so wäre $y_1 \neq \Lambda_{1\xi}$ für alle $\xi \in N$, also $y_1 = F_1(z_1)$ und

$$F_2(x_2) = \varphi(y_1) = \varphi(F_1(z_1)) = F_2(\varphi(z_1)),$$

also $x_2 = \varphi(z_1)$, also $z_1 = x_1$, also $y_1 = F_1(z_1) = F_1(x_1)$.

Wie aus dem Beweis zu Satz 14 ersichtlich ist, gibt es zwischen zwei transfiniten Peano-Systemen sogar genau eine isomorphe Abbildung. Der Isomorphiesatz läßt sich innerhalb jedes axiomatischen Systems der Mengenlehre beweisen, bei

dem über wohlgeordneten Klassen, deren Abschnitte Mengen sind, Beweise und Definitionen durch transfinite Induktion ausgeführt werden können.

7. Wie bereits in der Einleitung festgestellt wurde, ergibt sich die Notwendigkeit, neben der absoluten Klasse N aller natürlichen Ordinalzahlen noch Teilklassen von N zu betrachten, welche Mengen sind mit denselben strukturellen Eigenschaften wie N. Die zu betrachtenden Teilklassen müssen abgeschlossen gegenüber Limesbildung sein; sie sind dann auch gegenüber den HESSENBERGschen Operationen abgeschlossen. Es ist also zweckmäßig, als solche Teilklassen von N die Abschnitte von N unterhalb regulärer Anfangszahlen ω_σ zu wählen. Mit N_σ sei die Menge aller natürlichen Ordinalzahlen unterhalb der regulären Anfangszahl ω_σ bezeichnet. N_0 ist die Menge der *natürlichen Zahlen*. Es gilt sofort: Sind ω_σ, ω_τ reguläre Anfangszahlen mit $\sigma < \tau$, so ist $N_\sigma \subset N_\tau$. $\bigcup N_\sigma = N$ (σ durchlaufe alle Werte, für die ω_σ reguläre Anfangszahl ist). Die Mengen N_σ sind hinsichtlich der Nachfolgerbeziehung, der Limesbildung und bezüglich „$+$“ und „$\cdot$“ abgeschlossen. Es ist stets $0 \in N_\sigma$, $1 \in N_\sigma$. Die auf N_σ eingeschränkten Wohlordnungen „$<$“ und „$\leqq$“ sind wieder irreflexive bzw. reflexive Wohlordnungen über N_σ. Ist $\alpha \in N_\sigma \subset N$ mit der CANTORschen Normalform $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, so gilt auch $\alpha_i \in N_\sigma$. Alle Betrachtungen, die wir über die Zerlegung natürlicher Ordinalzahlen $\alpha \in N$ angestellt haben, gelten analog in bezug auf N_σ. Es gilt schließlich für N_σ das PEANOsche Axiomensystem in der Gestalt:

(1) *Alle natürlichen Limeszahlen $\lambda \in N_\sigma$ sind Elemente von N_σ.*
(2) *Zu jedem $\alpha \in N_\sigma$ gibt es genau einen unmittelbaren Nachfolger $\alpha' \in N_\sigma$.*
(3) *Die natürlichen Limeszahlen $\lambda \in N_\sigma$ sind nicht unmittelbare Nachfolger von Elementen $\alpha \in N_\sigma$.*
(4) *Jedes $\alpha \in N_\sigma$ ist unmittelbarer Nachfolger höchstens eines $\beta \in N_\sigma$.*
(5) *N_σ ist Teilmenge einer jeden Menge N^*, die alle natürlichen Limeszahlen von N_σ enthält und mit einem $\alpha \in N_\sigma$ auch α'.*

Damit sind die natürlichen Ordinalzahlen aus N_σ wieder bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt, was jetzt folgendes bedeutet:

Das Tripel $[M, \Lambda, F]$ heiße ein *transfinites* PEANO-*System vom Typ* ω_σ genau dann, wenn gilt: M ist eine Menge, F ist eine Funktion $F \subseteq M \times M$, Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi < T}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern vom Typ T, wobei $T' = 1$ für $\sigma = 0$ und $T = \omega_\sigma$ für $\sigma > 0$ (ω_σ reguläre Anfangszahl); es gelten die Axiome:

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für jedes $\xi < T$.
(2) Zu jedem $x \in M$ gibt es genau ein $y \in M$ mit $y = F(x)$.
(3) Für jedes Λ_ξ ($\xi < T$) gilt: Es gibt kein $x \in M$ mit $\Lambda_\xi = F(x)$.
(4) Für jedes $y \in M$ gibt es höchstens ein $x \in M$ mit $y = F(x)$.
(5) Voraussetzung. M^* Menge, $\Lambda_\xi \in M^*$ ($\xi < T$), $x \in M \cap M^* \to F(x) \in M^*$.
Behauptung. $M \subseteq M^*$.

Wie früher beweist man dann schließlich die Sätze:

Satz 15. *Ist $[M, \Lambda, F]$ ein transfinites* PEANO-*System vom Typ ω_σ, so gibt es genau eine Wohlordnung $\prec$ in M mit*

$$\Lambda_\xi \prec \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta, \quad x \in M \to x' = F(x)$$

($x' =$ unmittelbarer Nachfolger von x bezüglich $\prec$).

Satz 16 (Isomorphiesatz). *Sind* $[M_1, \Lambda_1, F_1]$ *und* $[M_2, \Lambda_2, F_2]$ *transfinite* PEANO-*Systeme vom Typ* ω_σ, *so sind diese Systeme isomorph; d. h., es gibt eine eineindeutige Abbildung* φ *von* M_1 *auf* M_2 *mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \quad \text{für} \quad \xi < T \quad \text{und} \quad \varphi(F_1(x)) = F_2(\varphi(x)).$$

§ 2 Ganze Ordinalzahlen

1. Für natürliche Ordinalzahlen m_1, n_1, m_2, n_2 definieren wir die *Differenzengleichheit* geordneter Paare zu: $[m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_2, n_2]$ genau dann, wenn

$$m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

ist. „$\overline{=}_{\mathrm{D}}$" ist eine Äquivalenzrelation; d. h., es gilt:

$$[m, n] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m, n],$$

$$[m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_2, n_2] \to [m_2, n_2] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_1, n_1],$$

$$[m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_2, n_2] \wedge [m_2, n_2] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_3, n_3] \to [m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_3, n_3].$$

Beweis. $m + n = m + n$. $m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \to m_2 + n_1 = m_1 + n_2$.

$$m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \wedge m_2 + n_3 = m_3 + n_2$$

$$\to (m_1 + n_2) + (m_2 + n_3) = (m_2 + n_1) + (m_3 + n_2)$$

$$\to (m_1 + n_3) + (m_2 + n_2) = (m_3 + n_1) + (m_2 + n_2)$$

$$\to m_1 + n_3 = m_3 = n_1.$$

Man kann also hinsichtlich „$\overline{=}_{\mathrm{D}}$" Abstraktionsklassen bilden; wir wollen dabei erreichen, daß diese Klassen Mengen werden. Dazu führen wir folgenden Begriff ein: Zu jedem Paar $[m, n]$ natürlicher Ordinalzahlen gibt es eine kleinste natürliche Ordinalzahl ξ — bezeichnet mit $\mu^{\mathrm{D}}(m, n)$ — so daß es ein Paar $[m_0, n_0]$ gibt mit $[m_0, n_0] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m, n]$ und $m_0, n_0 \in N_\xi$. Es gilt sofort:

$$[m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_2, n_2] \to \mu^{\mathrm{D}}(m_1, n_1) = \mu^{\mathrm{D}}(m_2, n_2).$$

Man definiere nun die *durch* $[m, n]$ *repräsentierte ganze Ordinalzahl* $G(m, n)$ als die Menge aller Paare $[p, q]$ mit $[p, q] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m, n]$ und $p, q \in N_{\mu^{\mathrm{D}}(m,n)}$. Es gilt:

$$G(m, n) \neq \varnothing,$$

$$[m_1, n_1] \in G(m_2, n_2) \to [m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_2, n_2],$$

$$[m_1, n_1] \overline{=}_{\mathrm{D}} [m_2, n_2] \leftrightarrow G(m_1, n_1) = G(m_2, n_2).$$

Wir nennen schließlich α eine *ganze Ordinalzahl*, falls $\exists\, m \exists\, n\, \alpha = G(m, n)$.

Es gilt für ganze Ordinalzahlen α und β:

$$\alpha = \beta \leftrightarrow \bigvee m \bigvee n\,([m, n] \in \alpha \leftrightarrow [m, n) \in \beta)$$

$$\leftrightarrow \exists\, m \exists\, n\,([m, n] \in \alpha \wedge [m, n] \in \beta)$$

$$\leftrightarrow \bigvee m \bigvee n\,(\alpha = G(m, n) \leftrightarrow \beta = G(m, n))$$

$$\leftrightarrow \exists\, m \exists\, n\,(\alpha = G(m, n) \wedge \beta = G(m, n)).$$

Mit G werde die Klasse aller ganzen Ordinalzahlen bezeichnet und mit G_σ die Menge aller ganzen Ordinalzahlen α, zu denen es natürliche Ordinalzahlen m, n gibt mit $\alpha = G(m, n)$ und $m, n \in N_\sigma$. Es ist dann G_0 die Menge der *ganzen Zahlen*. Für die Vereinigung $\bigcup G_\tau$ aller G_σ gilt: $\bigcup G_\sigma = G$. Ist $\sigma < \tau$ ($\omega_\sigma, \omega_\tau$ seien reguläre Anfangszahlen), so ist $G_\sigma \subset G_\tau$; denn z. B. ist $\alpha = G(\omega_\sigma, 0) \in G_\tau$ (wegen $\omega_\sigma < \omega_\tau$ ist $\omega_\sigma, 0 \in N_\tau$), aber $\alpha \notin G_\sigma$. Ist nämlich $\alpha = G(m, n)$, so ist

$$[\omega_\sigma, 0] \overline{\overline{}}_{\mathrm{D}}\, [m, n],$$

also $\omega_\sigma + n = m$; wegen $\omega_\sigma \notin N_\sigma$ und $m \geqq \omega_\sigma$ ist auch $m \notin N_\sigma$; also gibt es keinen Repräsentanten $[m, n]$ von α mit $m, n \in N_\sigma$, also $\alpha \notin G_\sigma$.

2. Die *Anordnungsbeziehung* zwischen ganzen Ordinalzahlen definiere man repräsentantenweise folgendermaßen: $\alpha_1 \underset{G}{<} \alpha_2$[1]) genau dann, wenn gilt:

$$\alpha_1 = G(m_1, n_1) \wedge \alpha_2 = G(m_2, n_2) \to m_1 + n_2 < m_2 + n_1.$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2; denn ist $\alpha = G(m_1, n_1) = G(p_1, q_1)$ und $\alpha_2 = G(m_2, n_2) = G(p_2, q_2)$, so ist

$$m_1 + q_1 = p_1 + n_1 \quad \text{und} \quad m_2 + q_2 = p_2 + n_2,$$

also $(m_1 + n_2) + (p_2 + q_1) = (m_2 + n_1) + (p_1 + q_2)$, also

$$m_1 + n_2 < m_2 + n_1 \leftrightarrow p_1 + q_2 < p_2 + q_1.$$

„$\underset{G}{<}$“ ist eine irreflexive Ordnung in G (und damit in jedem G_σ):

$$\alpha \not< \alpha,$$

$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma, \quad \alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha.$$

Beweis. Es sei $\alpha = G(m, n), \beta = G(p, q), \gamma = G(r, s)$. Dann ist: $m + n \not< m + n$.

$$m + q < p + n \wedge p + s < r + q \to (m + s) + (p + q) < (r + n) + (p + q)$$

$$\to m + s < r + n.\ \ m + q < p + n \vee m + q = p + n \vee p + n < m + q.$$

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „G“ auch weg.

Definiert man $\alpha \underset{G}{\leqq} \beta$ zu $\alpha \underset{G}{<} \beta \vee \alpha = \beta$[1]), so gilt wie üblich:

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \leqq \beta \wedge \alpha \neq \beta,$$

und „$\underset{G}{\leqq}$" ist eine reflexive Ordnung in G (und damit in jedem G_σ):

$$\alpha \leqq \alpha,$$
$$\alpha \leqq \beta \wedge \beta \leqq \gamma \rightarrow \alpha \leqq \gamma,$$
$$\alpha \leqq \beta \wedge \beta \leqq \alpha \rightarrow \alpha = \beta,$$
$$\alpha \leqq \beta \vee \beta \leqq \alpha.$$

3. Die *Summe* $\alpha_1 \underset{G}{+} \alpha_2$[1]) ganzer Ordinalzahlen α_1 und α_2 werde definiert als diejenige ganze Ordinalzahl α, für die gilt:

$$\alpha_1 = G(m_1, n_1) \wedge \alpha_2 = G(m_2, n_2) \rightarrow \alpha = G(m_1 + m_2, n_1 + n_2).$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2; denn ist $\alpha_1 = G(m_1, n_1) = G(p_1, q_1)$ und $\alpha_2 = G(m_2, n_2) = G(p_2, q_2)$, so ist $m_1 + q_1 = p_1 + n_1$ und $m_2 + q_2 = p_2 + n_2$, also $(m_1 + m_2) + (q_1 + q_2) = (p_1 + p_2) + (n_1 + n_2)$, also $[m_1 + m_2, n_1 + n_2] \overline{\overline{D}} [p_1 + p_2, q_1 + q_2]$, also

$$G(m_1 + m_2, n_1 + n_2) = G(p_1 + p_2, q_1 + q_2).$$

Die Mengen G_σ sind gegenüber „$\underset{G}{+}$" abgeschlossen. 0[1]) sei diejenige ganze Ordinalzahl α mit $[0, 0] \in \alpha$; es ist stets $0 \underset{G}{\in} G_\sigma$. Die *Inverse* $(-\alpha)$ von α sei diejenige ganze Ordinalzahl β mit: $\alpha = G(m, n) \rightarrow \beta = G(n, m)$; G_σ ist dann gegen Inversenbildung abgeschlossen. Aus den Definitionen folgen sofort die Sätze:

Satz 1. (1) $(-(-\alpha)) = \alpha$ (2) $(-0) = 0$

(3) $(-(\alpha + \beta)) = (-\alpha) + (-\beta)$

(4) $\alpha < \beta \leftrightarrow (-\beta) < (-\alpha)$.

Satz 2.

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

(2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

(3) $\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta$,

(4) $\alpha + 0 = \alpha$,

(5) $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Aus Satz 2 folgt:

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 \rightarrow \beta_1 = \beta_2,$$
$$\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2 \rightarrow \beta_1 < \beta_2,$$
$$\alpha + \beta = \alpha \rightarrow \beta = 0.$$

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „G" auch weg.

Zu ganzen Ordinalzahlen α und β gibt es genau eine ganze Ordinalzahl γ mit $\alpha + \gamma = \beta$, nämlich $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Man definiert dann die *Differenz* $\alpha - \beta$ als diejenige ganze Ordinalzahl γ, für die $\beta \underset{G}{+} \gamma = \alpha$ ist. Es gelten sofort die Sätze:

Satz 3. (1) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$,

(2) $\alpha - \beta = (-(\beta - \alpha))$,

(3) $\alpha - 0 = \alpha, \quad 0 - \alpha = (-\alpha), \quad \alpha - \beta = 0 \leftrightarrow \alpha = \beta$,

(4) $(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma)$.

Satz 4. (1) $\alpha < \beta \leftrightarrow \beta - \alpha > 0$,

(2) $\alpha < \beta \leftrightarrow \exists\, \gamma\, (\gamma > 0 \wedge \alpha + \gamma = \beta)$.

Aus Satz 3 (1) folgt, daß G_σ gegen Differenzbildung abgeschlossen ist.

4. Das *Produkt* $\alpha_1 \underset{G}{\cdot} \alpha_2$[1]) ganzer Ordinalzahlen α_1 und α_2 werde definiert als diejenige ganze Ordinalzahl α, für die gilt:

$$\alpha_1 = G(m_1, n_1) \wedge \alpha_2 = G(m_2, n_2) \to \alpha = G(m_1 m_2 + n_1 n_2,\ m_1 n_2 + m_2 n_1).$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2; denn ist $\alpha_1 = G(m_1, n_1) = G(p_1, q_1)$ und $\alpha_2 = G(m_2, n_2) = G(p_2, q_2)$, so ist

$$m_1 + q_1 = p_1 + n_1 \quad \text{und} \quad m_2 + q_2 = p_2 + n_2,$$

also $(m_1 + q_1)\, m_2 + (p_1 + n_1)\, n_2 = (p_1 + n_1)\, m_2 + (m_1 + q_1)\, n_2$ oder

$$(*) \quad (m_1 m_2 + n_1 n_2) + (p_1 n_2 + m_2 q_1) = (p_1 m_2 + q_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1).$$

Ebenso ist $(m_2 + q_2)\, p_1 + (p_2 + n_2)\, q_1 = (p_2 + n_2)\, p_1 + (m_2 + q_2)\, q_1$ oder

$$(**) \quad (p_1 m_2 + q_1 n_2) + (p_1 q_2 + p_2 q_1) = (p_1 p_2 + q_1 q_2) + (p_1 n_2 + m_2 q_1).$$

Addition von (*) und (**) ergibt:

$$(m_1 m_2 + n_1 n_2) + (p_1 q_2 + p_2 q_1) = (p_1 p_2 + q_1 q_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1)$$

oder

$$[m_1 m_2 + n_1 n_2,\ m_1 n_2 + m_2 n_1] \underset{D}{=} [p_1 p_2 + q_1 q_2,\ p_1 q_2 + p_2 q_1],$$

also schließlich

$$G(m_1 m_2 + n_1 n_2,\ m_1 n_2 + m_2 n_1) = G(p_1 p_2 + q_1 q_2,\ p_1 q_2 + p_2 q_1).$$

Die Mengen G_σ sind gegenüber „$\underset{G}{\cdot}$“ abgeschlossen. $\underset{G}{1}$[1]) sei diejenige ganze Ordinalzahl α mit $[1, 0] \in \alpha$; es ist stets $\underset{G}{1} \in G_\sigma$. Für Inverse gilt der

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „G“ auch weg.

Satz 5. (1) $\alpha \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot \beta = (-(\alpha \cdot \beta))$,

(2) $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.

Satz 6. (1) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

(2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

(3) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

(4) $\beta > 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta < \alpha_2 \cdot \beta$,

$\beta < 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta > \alpha_2 \cdot \beta$,

(5) $\alpha \cdot 1 = \alpha$,

(6) $\alpha \cdot 0 = 0$.

Beweis. Man beweist die Behauptungen repräsentantenweise. (1), (2), (3), (5) und (6) bereiten keine Schwierigkeiten. Aus $\beta > 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta < \alpha_2 \cdot \beta$ folgt für $\beta < 0$ und $\alpha_1 < \alpha_2$: $\alpha_1 \cdot (-\beta) < \alpha_2 \cdot (-\beta)$ oder $(-(\alpha_1 \cdot \beta)) < (-(\alpha_2 \cdot \beta))$ oder $\alpha_1 \cdot \beta > \alpha_2 \cdot \beta$. Wir brauchen also nur noch das erste Gesetz von (4) zu beweisen. Es sei $\alpha_1 = G(m_1, n_1)$, $\alpha_2 = G(m_2, n_2)$, $\beta = G(p, q)$. Wegen $\beta > 0$ ist $p > q$, wegen $\alpha_1 < \alpha_2$ ist $m_1 + n_2 < m_2 + n_1$. $\alpha_1 \cdot \beta = G(m_1 p + n_1 q, m_1 q + p n_1)$, $\alpha_2 \cdot \beta = G(m_2 p + n_2 q, m_2 q + p n_2)$. Zu zeigen ist

$$(m_1 p + n_1 q) + (m_2 q + p n_2) < (m_2 p + n_2 q) + (m_1 q + p n_1)$$

oder

$$p(m_1 + n_2) + q(m_2 + n_1) < p(m_2 + n_1) + q(m_1 + n_2),$$

wobei also $p > q$ und $m_1 + n_2 < m_2 + n_1$ ist. Dies gilt aber sofort nach dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: *Sind p, q, m, n, natürliche Ordinalzahlen mit $p > q$ und $n < m$, so ist*

$$pn + qm < pm + qn.$$

Beweis. Die Fälle $q = 0$ und $n = 0$ sind trivial. Wir dürfen also $q > 0$ und $n > 0$ voraussetzen. Es sei in jeweils gemeinsamer Cantorscher Normalform:

$$p = \sum_{i \leqq k} \omega^{\alpha_i} p_i, \quad q = \sum_{i \leqq k} \omega^{\alpha_i} q_i;$$

$$n = \sum_{i \leqq l} \omega^{\beta_i} n_i, \quad m = \sum_{i \leqq l} \omega^{\beta_i} m_i.$$

Dabei gilt also $p_i + q_i > 0$, $n_i + m_i > 0$. Wegen $p > q$ und $n < m$ gibt es genau ein $k_0 \leqq k$ und genau ein $l_0 \leqq l$ mit: $p_{k_0} > q_{k_0}$ und $p_\varkappa = q_\varkappa$ für $0 \leqq \varkappa < k_0$; $n_{l_0} < m_{l_0}$ und $n_\lambda = m_\lambda$ für $0 \leqq \lambda < l_0$. Für $pn + qm < pm + qn$ ist dann noch zu zeigen:

$$p\left(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} n_i\right) + q\left(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} m_i\right) < p\left(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} m_i\right) + q\left(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} n_i\right).$$

Hierfür genügt es wiederum zu zeigen:

$$\underbrace{\Big(\sum_{k_0 \leqq i \leqq k} \omega^{\alpha_i} p_i\Big)\Big(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} n_i\Big)}_{\text{I}} + \underbrace{\Big(\sum_{k_0 \leqq i \leqq k} \omega^{\alpha_i} q_i\Big)\Big(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} m_i\Big)}_{\text{II}}$$

$$< \underbrace{\Big(\sum_{k_0 \leqq i \leqq k} \omega^{\alpha_i} p_i\Big)\Big(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} m_i\Big)}_{\text{III}} + \underbrace{\Big(\sum_{k_0 \leqq i \leqq k} \omega^{\beta_i} q_i\Big)\Big(\sum_{l_0 \leqq i \leqq l} \omega^{\beta_i} n_i\Big)}_{\text{IV}}.$$

Es ist $\text{I} + \text{II} < \omega^{\alpha_{k_0} + \beta_{l_0}} \cdot (p_{k_0} n_{l_0} + q_{k_0} m_{l_0} + 1)$ und

$$\omega^{\alpha_{k_0} + \beta_{l_0}} \cdot (p_{k_0} m_{l_0} + q_{k_0} n_{l_0}) \leqq \text{III} + \text{IV}.$$

Es genügt also zu zeigen:

$$\omega^{\alpha_{k_0} + \beta_{l_0}} \cdot (p_{k_0} n_{l_0} + q_{k_0} m_{l_0} + 1) \leqq \omega^{\alpha_{k_0} + \beta_{l_0}} \cdot (p_{k_0} m_{l_0} + q_{k_0} n_{l_0})$$

oder:

$$p_{k_0} n_{l_0} + q_{k_0} m_{l_0} < p_{k_0} m_{l_0} + q_{k_0} n_{l_0}.$$

Dabei ist $p_{k_0} > q_{k_0}$ und $n_{l_0} < m_{l_0}$ (alles natürliche Zahlen). Es gibt nun eine natürliche Zahl $d > 0$ mit $n_{l_0} + d = m_{l_0}$. Für d gilt: $q_{k_0} d < p_{k_0} d$. Also ist auch

$$p_{k_0} n_{l_0} + q_{k_0} n_{l_0} + q_{k_0} d < p_{k_0} n_{l_0} + p_{k_0} d + q_{k_0} n_{l_0},$$

also $p_{k_0} n_{l_0} + q_{k_0} m_{l_0} < p_{k_0} m_{l_0} + q_{k_0} n_{l_0}$.

Aus Satz 6 folgt:

$$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 = \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2,$$

$$\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2,$$

$$\alpha < 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 > \beta_2,$$

$$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta = \alpha \to \beta = 1,$$

$$\alpha \cdot \beta = 0 \to \alpha = 0 \vee \beta = 0,$$

$$\alpha \cdot \beta = 1 \to (\alpha = 1 \wedge \beta = 1) \vee (\alpha = (-1) \wedge \beta = (-1)),$$

$$\alpha \cdot \beta = (-1) \to (\alpha = 1 \wedge \beta = (-1)) \vee (\alpha = (-1) \wedge \beta = 1).$$

5. Eine ganze Ordinalzahl α heißt *positiv* bzw. *negativ*, je nachdem $\alpha \underset{G}{>} 0$ oder $\alpha \underset{G}{<} 0$ ist. Es gilt der

Satz 7.

(1) $\alpha > 0 \wedge \beta > 0 \to \alpha + \beta > 0,$
$\alpha < 0 \wedge \beta < 0 \to \alpha + \beta < 0,$

(2) $(\alpha > 0 \wedge \beta > 0) \vee (\alpha < 0 \wedge \beta < 0) \leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0.$

Aus Satz 1 folgt: $\alpha > 0 \leftrightarrow (-\alpha) < 0$, $\alpha < 0 \leftrightarrow (-\alpha) > 0$; $\alpha \neq 0 \leftrightarrow (-\alpha) \neq 0$.

α nennen wir eine *natürliche ganze Ordinalzahl*, falls es eine natürliche Ordinalzahl m gibt mit $\alpha = G(m, 0)$; es gibt dann genau eine solche natürliche Ordinal-

zahl m; denn wenn $\alpha = G(m, 0) = G(n, 0)$, so wäre $[m, 0] \overline{\overline{\mathrm{D}}} [n, 0]$, also $m + 0 = n + 0$, also $m = n$. Ist α eine natürliche ganze Ordinalzahl, so ist $\alpha \geqq 0$, die Umkehrung gilt aber nicht: Es ist z. B. $G(\omega, 1) > 0$, aber nie $[\omega, 1] \overline{\mathrm{D}} [m, 0]$, da sonst $\omega = m + 1$ wäre, was unmöglich ist. Es gibt also positive ganze Ordinalzahlen, die nicht natürlich sind. Es sei $\varphi(\alpha)$ die eineindeutige Abbildung der Klasse aller natürlichen ganzen Ordinalzahlen $\alpha \in G$ auf die Klasse N aller natürlichen Ordinalzahlen m mit $\varphi(\alpha) = m \leftrightarrow \alpha = G(m, 0)$; dann gilt der

Satz 8. *φ ist eine isomorphe Abbildung; d. h., für natürliche ganze Ordinalzahlen α, β gilt*

$$\varphi(\alpha \underset{G}{+} \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta),$$
$$\varphi(\alpha \underset{G}{\cdot} \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta),$$
$$\alpha \underset{G}{<} \beta \leftrightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta),$$
$$\varphi(\underset{G}{0}) = 0, \quad \varphi(\underset{G}{1}) = 1.$$

Schränken wir $\varphi(\alpha)$ auf G_σ ein, betrachten also die eineindeutige Abbildung $\varphi_\sigma(\alpha)$ der Menge aller natürlichen ganzen Ordinalzahlen $\alpha \in G_\sigma$ auf N_σ mit $\varphi_\sigma(\alpha) = m \leftrightarrow \alpha = G(m, 0)$, so ist φ_σ ebenfalls eine derartige isomorphe Abbildung, jetzt allerdings innerhalb G_σ, N_σ. Nach Satz 8 und dieser Bemerkung ist N und jedes N_σ isomorph in G bzw. G_σ eingebettet; man kann also die eingeführten Symbole im Bereich der ganzen Ordinalzahlen zusammenfallen lassen mit den bisherigen Symbolen im Bereich der natürlichen Ordinalzahlen $(+, \cdot, <, 0, 1)$; statt α, wo $\alpha = G(m, 0)$ ist, schreiben wir einfach m. Die natürlichen ganzen Ordinalzahlen nennen wir einfach wieder *natürliche Ordinalzahlen.*

Satz 9. *Zu jeder ganzen Ordinalzahl $\alpha \in G_\sigma$ gibt es natürliche Ordinalzahlen m und n aus N_σ mit $\alpha = m - n$.*

Beweis. Ist $\alpha = G(m, n)$, so ist $\alpha = G(m, 0) + G(0, n) = m - n$; ist dabei $\alpha \in G_\sigma$, so lassen sich m und n aus N_σ wählen.

6. Die ganzen Ordinalzahlen lassen sich in Normalform schreiben:

Satz 10. *Jede ganze Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ läßt sich bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig darstellen als endliche Summe $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$, wobei gilt $m \in N_0$; $a_i \in G_0$, $a_i \neq 0$; $\alpha_i \in N$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.*

Beweis. Jede ganze Ordinalzahl α ist die Differenz natürlicher Ordinalzahlen m, n: $\alpha = m - n$; wegen $\alpha = m - n = (m + p) - (n + p)$ kann man $m > 0$ und $n > 0$ voraussetzen. Nimmt man die CANTORschen Normalformen von m und n und faßt in $(m - n)$ entsprechende Potenzen zusammen, so erhält man für $\alpha \neq 0$ eine gewünschte Summendarstellung $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i$. Und nun zur Eindeutigkeit. Es sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha = \sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i = \sum_{i \leqq n} \omega^{\beta_i} b_i$, wobei die Summanden nach fallenden Exponenten geordnet sind. Wir zeigen zunächst $\alpha_0 = \beta_0$ und $a_0 = b_0$. Wir setzen $\sum_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i = \omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1$, $\sum_{i \leqq n} \omega^{\beta_i} b_i = \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$; dann ist $-\omega^{\alpha_0} < \mathrm{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}$ und $-\omega^{\beta_0} < \mathrm{Rest}_2 < \omega^{\beta_0}$; wegen

$$\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 = \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$$

ist also $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$, oder es ist $a_0 < 0$ und $b_0 < 0$. 1. Fall: $a_0 > 0 \wedge b_0 > 0$. Wäre $\alpha_0 < \beta_0$, so wäre $\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) < \omega^{\beta_0}$. Ist $n = 0$, so hätten wir wegen $\mathrm{Rest}_2 = 0$ einen Widerspruch zu $\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 = \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$. Ist $n > 0$, so gibt es eine natürliche Zahl p mit $-p\omega^{\beta_1} < \mathrm{Rest}_2 < p\omega^{\beta_1}$. Wegen $\beta_1 < \beta_0$ ist dann $\omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) + p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0}$ oder

$$\omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) < \omega^{\beta_0} - p\omega^{\beta_1} \leqq \omega^{\beta_0} b_0 - p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2,$$

also $\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) < \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$, Widerspruch. Es ist demnach $\alpha_0 \not< \beta_0$. Symmetrisch hierzu erhält man $\beta_0 \not< \alpha_0$, also insgesamt $\alpha_0 = \beta_0$. Wäre nun $a_0 < b_0$, so wäre für $m = n = 0$: $\omega^{\alpha_0} a_0 < \omega^{\beta_0} b_0$ im Widerspruch zu $\omega^{\alpha_0} a_0 = \omega^{\beta_0} b_0$. Ist $m = 0$ und $n > 0$, so gibt es wieder eine natürliche Zahl p mit $-p\omega^{\beta_1} < \mathrm{Rest}_2 < p\omega^{\beta_1}$; dann ist $\omega^{\alpha_0} a_0 + p\omega^{\beta_1} < \omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) \leqq \omega^{\beta_0} b_0$ oder $\omega^{\alpha_0} a_0 < \omega^{\beta_0} b_0 - p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$ im Widerspruch zu

$$\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 = \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2.$$

Ist $m > 0$ und $n = 0$, so ist $\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) \leqq \omega^{\beta_0} b_0$; Widerspruch. Für $m > 0$ und $n > 0$ gibt es natürliche Zahlen q und p mit:

$$-q\omega^{\alpha_1} < \mathrm{Rest}_1 < q\omega^{\alpha_1} \quad \text{und} \quad -p\omega^{\beta_1} < \mathrm{Rest}_2 < p\omega^{\beta_1}.$$

Dann ist $\omega^{\alpha_0} a_0 + q\omega^{\alpha_1} + p\omega^{\beta_1} < \omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) \leqq \omega^{\beta_0} b_0$ oder

$$\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 < \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2,$$

Widerspruch. Es ist demnach $a_0 \not< b_0$. Symmetrisch hierzu erhält man $b_0 \not< a_0$, also insgesamt $a_0 = b_0$. Dual zu diesem 1. Fall erhält man ebenfalls $\alpha_0 = \beta_0$ und $a_0 = b_0$ im 2. Fall: $a_0 < 0 \wedge b_0 < 0$. Man schließt jetzt folgendermaßen: Wäre $\alpha_0 < \beta_0$, so wäre $\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 > \omega^{\alpha_0}(a_0 - 1) > -\omega^{\beta_0}$. Für $n = 0$ erhält man wegen $\mathrm{Rest}_2 = 0$ einen Widerspruch zu $\omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1 = \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$. Ist $n > 0$, so gibt es wie oben eine natürliche Zahl p, mit der wegen $\beta_1 < \beta_0$ gilt: $\omega^{\alpha_0}(a_0 - 1) - p\omega^{\beta_1} > -\omega^{\beta_0}$, also $\omega^{\alpha_0}(a_0 - 1) > -\omega^{\beta_0} + p\omega^{\beta_1} \geqq \omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2$, Widerspruch. Also $\alpha_0 \not< \beta_0$; symmetrisch hierzu gilt $\beta_0 \not< \alpha_0$, also insgesamt $\alpha_0 = \beta_0$. Wäre $a_0 < b_0$, so wäre für $m = n = 0$: $\omega^{\beta_0} b_0 > \omega^{\alpha_0} a_0$, Widerspruch. Ist $m = 0$ und $n > 0$, so ist $\omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2 > \omega^{\beta_0}(b_0 - 1) \geqq \omega^{\alpha_0} a_0$, Widerspruch. Ist $m > 0$ und $n = 0$, so gibt es eine natürliche Zahl q mit $-q\omega^{\alpha_1} < \mathrm{Rest}_1 < q\omega^{\alpha_1}$; dann ist $\omega^{\beta_0} b_0 - q\omega^{\alpha_1} > \omega^{\beta_0}(b_0 - 1) \geqq \omega^{\alpha_0} a_0$ oder $\omega^{\beta_0} b_0 > \omega^{\alpha_0} a_0 + q\omega^{\alpha_1} > \omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1$, Widerspruch. Ist $m > 0$ und $n > 0$, so gibt es natürliche Zahlen q und p wie oben; es ist dann $\omega^{\beta_0} b_0 - p\omega^{\beta_1} - q\omega^{\alpha_1} > \omega^{\beta_0}(b_0 - 1) \geqq \omega^{\alpha_0} a_0$ oder

$$\omega^{\beta_0} b_0 + \mathrm{Rest}_2 > \omega^{\alpha_0} a_0 + \mathrm{Rest}_1,$$

Widerspruch. Es ist demnach $a_0 \not< b_0$; symmetrisch hierzu gilt $b_0 \not< a_0$, also insgesamt $a_0 = b_0$. Wir haben damit allgemein bewiesen: $a_0 = \beta_0$ und $a_0 = b_0$. Mit Induktionsschluß beweist man dann wie eben: Wenn $0 \leqq k \leqq m, n$, so ist $\alpha_k = \beta_k$ und $a_k = b_k$. Wäre nun $m < n$, so wäre $\sum\limits_{i \leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i = \sum\limits_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} b_i + \sum\limits_{m < i \leqq n} \omega^{\beta_i} b_i$, also $\sum\limits_{m < i \leqq n} \omega^{\beta_i} b_i = 0$. Dies ist ein Widerspruch, da $\omega^{\beta_{m+1}} b_{m+1} \neq 0$ und für den

Rest von $\sum_{m<i\leqq n} \omega^{\beta_i} b_i$ gilt: $-\omega^{\beta_{m+1}} < \text{Rest} < \omega^{\beta_{m+1}}$. Also ist $m \not< n$; symmetrisch hierzu ist $n \not< m$, also insgesamt $m = n$.

Man erhält in Satz 10 eine eindeutig bestimmte Normalform für ganze Ordinalzahlen $\alpha \neq 0$, wenn man verlangt, daß die Summanden nach fallenden Exponenten geordnet sind; diese so bestimmte Normalform nennen wir wieder die *Cantorsche Normalform von* α. Da eine ganze Ordinalzahl $\alpha \in G_\sigma, \alpha \neq 0$ dargestellt werden kann als $\alpha = m - n$, wo $m,n \in N_\sigma$ $(m,n > 0)$, und da in den Cantorschen Normalformen von m und n daher die Summanden, die Faktoren in den Summanden und die Exponenten von ω ebenfalls in N_σ liegen, so liegen auch in der Cantorschen Normalform von α die Exponenten von ω, die Faktoren in den Summanden und die Summanden selbst in G_σ (die Exponenten und die Potenzen von ω in N_σ, die Koeffizienten in G_0). Ist $\alpha \in G$, $\alpha \neq 0$ mit der Cantorschen Normalform $\alpha = \sum_{i\leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i = \omega^{\alpha_0} a_0 + \text{Rest}$, so gilt wegen $-\omega^{\alpha_0} < \text{Rest} < \omega^{\alpha_0}$:

$$\alpha > 0 \leftrightarrow a_0 > 0, \quad \alpha < 0 \leftrightarrow a_0 < 0.$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der Cantorschen Normalform für ganze Ordinalzahlen gilt: Die ganze Ordinalzahl $\alpha > 0$ ist genau dann keine natürliche Ordinalzahl, wenn mindestens ein Koeffizient in ihrer Cantorschen Normalform negativ ist.

Definiert man den *absoluten Betrag* einer ganzen Ordinalzahl α zu

$$|\alpha| \underset{Dt}{=} \begin{cases} \alpha, \text{ falls } \alpha \geqq 0, \\ -\alpha, \text{ falls } \alpha < 0, \end{cases} \quad \text{so gilt der}$$

Satz 11. *Ist* $\alpha \in G_\sigma$, *so auch* $\beta \in G_\sigma$, *falls nur* $|\beta| \leqq |\alpha|$.

Beweis. Die Fälle $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sind trivial. Ist $\alpha < 0 \wedge \beta < 0 \wedge -\beta \leqq -\alpha$ oder $\alpha < 0 \wedge \beta > 0 \wedge \beta \leqq -\alpha$ oder $\alpha > 0 \wedge \beta < 0 \wedge -\beta \leqq \alpha$, so folgt jedesmal — da mit $\alpha, \beta \in G_\sigma$ auch $(-\alpha), (-\beta) \in G_\sigma$ — die Behauptung aus dem noch zu beweisenden Fall: $\alpha < 0 \wedge \beta > 0 \wedge \beta \leqq \alpha \dot{\rightarrow} \alpha \in G_\sigma \rightarrow \beta \in G_\sigma$. Die Cantorschen Normalformen von α und β seien

$$\alpha = \sum_{i\leqq m} \omega^{\alpha_i} a_i = \omega^{\alpha_0} a_0 + \text{Rest}_1, \qquad \beta = \sum_{i\leqq n} \omega^{\beta_i} b_i = \omega^{\beta_0} b_0 + \text{Rest}_2.$$

Es ist $\beta_0 \leqq \alpha_0$. Wir führen die Annahme $\alpha_0 < \beta_0$ folgendermaßen zum Widerspruch: Wegen $\alpha,\beta > 0$ ist $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$. Ist nun $\text{Rest}_1 = \text{Rest}_2 = 0$, so ist nach Voraussetzung $\omega^{\beta_0} b_0 \leqq \omega^{\alpha_0} a_0$, also $\alpha_0 \not< \beta_0$. Ist $\text{Rest}_1 = 0$ und $\text{Rest}_2 \neq 0$, wobei für eine geeignete natürliche Zahl p gelte: $-p\omega^{\beta_1} < \text{Rest}_2 < p\omega^{\beta_1}$, so ist $\omega^{\alpha_0} a_0 + p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0}$ (wegen $\alpha_0,\beta_1 < \beta_0$), also auch $\omega^{\alpha_0} a_0 + p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0} b_0$ oder $\omega^{\alpha_0} a_0 < \omega^{\beta_0} b_0 - p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0} b_0 + \text{Rest}_2$, also $\alpha < \beta$; Widerspruch zu $\beta \leqq \alpha$. Ist $\text{Rest}_2 = 0$ und $\text{Rest}_1 \neq 0$, so ist wegen $-\omega^{\alpha_0} < \text{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}$:

$$\omega^{\alpha_0} a_0 + \text{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}(a_0 + 1) < \omega^{\beta_0} \leqq \omega^{\beta_0} b_0,$$

also $\alpha < \beta$; Widerspruch. Ist schließlich $\text{Rest}_1 \neq 0$ und $\text{Rest}_2 \neq 0$, wobei für geeignete natürliche Zahlen q, p gelte

$$-q\omega^{\alpha_1} < \text{Rest}_1 < q\omega^{\alpha_1} \text{ und } -p\omega^{\beta_1} < \text{Rest}_2 < p\omega^{\beta_1},$$

so ist $\omega^{\alpha_0}a_0 + \mathrm{Rest}_1 < \omega^{\alpha_0}a_0 + q\omega^{\alpha_1}$, $\omega^{\alpha_0}a_0 + q\omega^{\alpha_1} + p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0} \leqq \omega^{\beta_0}b_0$, also $\omega^{\alpha_0}a_0 + q\omega^{\alpha_1} < \omega^{\beta_0}b_0 - p\omega^{\beta_1} < \omega^{\beta_0}b_0 + \mathrm{Rest}_2$, also $\alpha < \beta$; Widerspruch. Es ist also $\beta_0 \leqq \alpha_0$. Da nun $\alpha \in G_\sigma$, so ist $\omega^{\alpha_0} \in N_\sigma$, also sind wegen $\beta_0 \leqq \alpha_0$ auch alle Potenzen ω^{β_i} von β in N_σ gelegen, also $\beta \in G_\sigma$.

Satz 12. *Für jede ganze Ordinalzahl $\gamma \neq 0$ gibt es nur endlich viele Paare $[\alpha, \beta]$ ganzer Ordinalzahlen, so daß $\alpha \cdot \beta = \gamma$ ist und α von der Form $\alpha = \omega^\delta a$ ($\delta \in N$, $a \in G_0$) ist.*

Beweis. Es sei $\gamma = \sum_{i \leqq m} \omega^{\gamma_i} g_i$ die CANTORsche Normalform von γ, ebenso $\beta = \sum_{i \leqq n} \omega^{\beta_i} b_i$ die von β. Für $\alpha = \omega^\delta a$ und $\beta \cdot \alpha = \gamma$ muß dann gelten: $\beta_0 + \delta = \gamma_0$ und $b_0 \cdot a = g_0$. Es gibt aber nur endlich viele β_0, δ mit $\beta_0 + \delta = \gamma_0$ und nur endlich viele b_0, a mit $b_0 \cdot a = g_0$. Es kommen also als Faktor α nur endlich viele ganze Ordinalzahlen der Form $\alpha = \omega^\delta a$ in Frage; zu jedem dieser α gibt es höchstens ein β mit $\alpha \cdot \beta = \gamma$; also gilt die Behauptung.

Eine ganze Ordinalzahl γ der Form $\gamma = \omega^\alpha a$ ($\alpha \in N$; $a \in G_0$, $a \neq 0$) hat also nur endlich viele Teiler, da ja als Teiler nur Zahlen der Form $\omega^\beta b$ in Frage kommen.

Satz 13. *Zu jeder nicht leeren Menge von 0 verschiedener ganzer Ordinalzahlen gibt es genau einen gemeinsamen Teiler der Form $\omega^\alpha a > 0$ ($a \in G_0$, $\alpha \in N$), so daß für jeden gemeinsamen Teiler $\omega^\beta b$ ($b \in G_0$, $\beta \in N$) dieser Menge gilt: $|\omega^\beta b| \leqq \omega^\alpha a$. Dividiert man jede Zahl der Menge durch $\omega^\alpha a$, so besitzt die daraus entstehende Menge ganzer Ordinalzahlen keinen gemeinsamen Teiler der Form $\omega^\beta b \neq \pm 1$.*

Beweis. Da jede ganze Ordinalzahl $\gamma \neq 0$ nur endlich viele Teiler $\omega^\beta b$ hat ($\beta \in N$, $b \in G_0$), gibt es auch nur endlich viele gemeinsame Teiler $\omega^\beta b > 0$ einer nicht leeren Menge von 0 verschiedener Ordinalzahlen. Jedes $\gamma \neq 0$ hat aber den Teiler $\omega^0 \cdot 1 > 0$; also gibt es genau einen größten gemeinsamen Teiler der Form $\omega^\beta b > 0$; dieser ist dann das gewünschte $\omega^\alpha a > 0$. Hätte nach Division der Menge durch $\omega^\alpha a$ die entstehende Menge noch einen gemeinsamen Faktor $\omega^\beta b \neq \pm 1$ (es muß natürlich $\omega^\beta b \neq 0$ sein), so wären $\omega^\alpha a \cdot (\pm\, \omega^\beta b)$ gemeinsame Faktoren der Ausgangsmenge von der Form $\omega^\delta d$ ($\delta \in N$, $d \in G_0$); einer dieser Faktoren wäre > 0 und $> \omega^\alpha a$, was ein Widerspruch zur Konstruktion von $\omega^\alpha a$ ist.

Besteht die Menge des Satzes 13 aus lauter Zahlen $\omega^\beta b$ ($\beta \in N$; $b \in G_0$, $b \neq 0$), so ist $\omega^\alpha a$ der größte gemeinsame Teiler der Menge, und nach Division durch $\omega^\alpha a$ ist die entstehende Menge teilerfremd (d. h., ihr gemeinsamer Teiler ist 1).

7. Wir wenden uns jetzt den Teilbarkeitseigenschaften ganzer Ordinalzahlen zu. Eine ganze Ordinalzahl α heiße (*multiplikativ*) *unzerlegbar* oder *Primzahl*, falls es keine ganzen Ordinalzahlen ξ, η gibt mit $|\xi|, |\eta| > 1$ und $\xi \cdot \eta = \alpha$; sonst (*multiplikativ*) *zerlegbar*. Ist $\xi \cdot \eta = \alpha$, so heißen ξ, η *Teiler* von α. Ist $\xi \cdot \eta = \alpha$ und $|\alpha| > 0$, so ist $|\xi|, |\eta| \leqq |\alpha|$. 0 und 1 sind trivialerweise Primzahlen.

Satz 14. *Eine ganze Ordinalzahl α mit der* CANTORschen *Normalform $\alpha = \sum_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} a_i$, für die $\alpha_0 = \omega^\xi$ ist (für ein $\xi \in N$), ist Primzahl genau dann, wenn $n = 0$ und $a_0 = \pm 1$ ist oder wenn $n > 0$ und die Menge der a_i ($0 \leqq i \leqq n$) teilerfremd ist.*

Beweis. Die Richtung ($\rightarrow$) ist trivial. ($\leftarrow$). Wenn $n = 0 \wedge a_0 = \pm 1$, so ist $\alpha = \pm\omega^{(\omega^\xi)}$; wegen der additiven Unzerlegbarkeit von ω^ξ innerhalb N gibt es keine ξ, η mit $|\xi|, |\eta| > 1$ und $\xi \cdot \eta = \alpha$. Wenn $n > 0$, so gilt für $\xi \cdot \eta = \alpha$ etwa

$\xi = \omega^0 b = b$ $(b \in G_0,\ |b| > 1)$; es wäre dann $\eta = \sum_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} c_i$ mit $c_i \cdot b = a_i$ im Widerspruch zur Teilerfremdheit der Menge der a_i (d. h., es gibt keine ganze Zahl $\neq \pm 1$, die Teiler aller a_i ist).

Satz 15. *Eine ganze Ordinalzahl α mit der* Cantorschen *Normalform* $\alpha = \sum_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} a_i$ *ist bis auf Faktoren* $\omega^\xi a$ $(a \in G_0,\ a \neq 0)$ *multiplikativ unzerlegbar, falls es eine endliche Primzahl p gibt mit*

a) $a_0 \not\equiv 0\,(p^2)$, $a_i \equiv 0\,(p)$ *für* $0 \leqq i < n$, $a_n \not\equiv 0\,(p)$

oder b) $a_n \not\equiv 0\,(p^2)$, $a_i \equiv 0\,(p)$ *für* $0 < i \leqq n$, $a_0 \not\equiv 0\,(p)$.

Beweis. Der Beweis verläuft wörtlich wie der Beweis zu Satz 8 aus § 1, nur daß zu den beiden Fällen für $a_{i_0'}$ — nämlich $a_{i_0'} = b_{i_0} \cdot c_0$ oder $a_{i_0'} = b_{i_0} \cdot c_0 +$ + Summe von Produkten $b_j \cdot c_k$, wo $j < i_0$ — noch als dritter Fall hinzukommt: $0 = b_{i_0} \cdot c_0 +$ Summe von Produkten $b_j \cdot c_k$, wo $j < i_0$.

Setzt man in Satz 15 noch voraus, daß die Menge der a_i teilerfremd ist und es kein $\xi > 0$ $(\xi \in N)$ gibt, welches gemeinsamer Teil aller α_i ist, so ist α Primzahl.

Satz 16. *Ist die Primzahl* $p = \omega^\alpha a$ $(a \in G_0,\ a \neq 0)$ *Teiler des Produktes* $\xi \cdot \eta$, *so ist p Teiler von ξ oder Teiler von η.*

Beweis. Der Fall $|p| = 1$ ist trivial, ebenso die Fälle $\xi = 0$ und $\eta = 0$. Die Cantorschen Normalformen von ξ und η seien: $\xi = \sum_{i \leqq r} \omega^{\xi_i} x_i$, $\eta = \sum_{i \leqq s} \omega^{\eta_i} y_i$. Für p unterscheiden wir zwei Fälle: (1) $a = \pm 1$ und $\alpha = \omega^\beta$ (d. h. α additiv unzerlegbar), (2) $\alpha = 0$ und a endliche Primzahl $\neq \pm 1$. Ist im Fall (1) $\pm \omega^{(\omega^\beta)}$ Teiler von $\xi \cdot \eta$, so muß jeder in der Cantorschen Normalform von $\xi \cdot \eta$ auftretende Exponent $\xi_\varrho + \eta_\sigma$ als Teil ω^β haben, womit dann also ω^β Teil von ξ_ϱ oder Teil von η_σ ist. Der Exponent $\xi_0 + \eta_0$ tritt auf; also ist ω^β Teil von ξ_0 oder von η_0. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, ω^β sei Teil von ξ_0. Ist ω^β Teil jedes ξ_ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq r)$, so ist ξ durch $\pm \omega^{(\omega^\beta)}$ teilbar. Andernfalls gebe es ein kleinstes $0 < \varrho_0 \leqq r$ mit: ω^β ist nicht Teil von ξ_{ϱ_0}. Dann zeigen wir, daß alle η_σ $(0 \leqq \sigma \leqq s)$ als Teil ω^β haben und daß damit η durch $\pm \omega^{(\omega^\beta)}$ teilbar ist. Es hat in der Tat η_0 den Teil ω^β: Tritt nämlich der Exponent $\xi_{\varrho_0} + \eta_0$ in der Normalform von $\xi \cdot \eta$ auf, so ist ω^β Teil von η_0, da ω^β nicht Teil von ξ_{ϱ_0} ist. Tritt $\xi_{\varrho_0} + \eta_0$ nicht als Exponent in der Normalform von $\xi \cdot \eta$ auf, so muß sich $\omega^{\xi_{\varrho_0}} x_{\varrho_0} \cdot \omega^{\eta_0} y_0$ durch andere Potenzprodukte mit derselben Exponentensumme $\xi_{\varrho_0} + \eta_0$ wegheben, es muß also gelten

$$0 = \omega^{\xi_{\varrho_0} + \eta_0} x_{\varrho_0} y_0 + \sum_{\substack{\text{gewisse } \varrho, \sigma \\ \text{mit } \varrho < \varrho_0}} \omega^{\xi_\varrho + \eta_\sigma} x_\varrho y_\sigma$$

bei $\xi_{\varrho_0} + \eta_0 = \xi_\varrho + \eta_\sigma$. Da $\varrho < \varrho_0$, hat ξ_ϱ den Teil ω^β, also muß $\xi_{\varrho_0} + \eta_0$ ebenfalls den Teil ω^β haben, also hat η_0 den Teil ω^β. Haben nun $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ den Teil ω^β $(0 \leqq n < s)$, so gilt: Tritt $\xi_{\varrho_0} + \eta_{n+1}$ als Exponent in der Normalform von $\xi \cdot \eta$ auf, so hat η_{n+1} den Teil ω^β. Tritt $\xi_{\varrho_0} + \eta_{n+1}$ nicht als Exponent auf, so muß gelten

$$0 = \omega^{\xi_{\varrho_0} + \eta_{n+1}} x_{\varrho_0} y_{n+1} + \sum_{\substack{\text{gewisse } \varrho, \sigma \text{ mit} \\ \varrho < \varrho_0 \vee \sigma < n+1}} \omega^{\xi_\varrho + \eta_\sigma} x_\varrho y_\sigma$$

bei $\xi_{\varrho_0} + \eta_{n+1} = \xi_\varrho + \eta_\sigma$. Da $\varrho < \varrho_0$ oder $\sigma < n+1$ ist, hat ξ_ϱ oder η_σ als Teil ω^β, also muß wieder $\xi_{\varrho_0} + \eta_{n+1}$ den Teil ω^β haben, also schließlich auch η_{n+1}. Damit ist also η durch $\pm\,\omega^{(\omega^\beta)}$ teilbar. Der Fall (2) beweist sich wörtlich wie der Fall (2) von Satz 10 aus § 1, nur daß zu den Fällen $a_{i_0} = x_{\varrho_0} y_0$ und $a_{i_0} = x_{\varrho_0} y_0 +$ Summe von Produkten $x_\varrho y_\sigma$ mit $0 \leqq \varrho < \varrho_0$ (bzw. analog im Induktionsschritt) noch als dritter Fall hinzukommt: $0 = x_{\varrho_0} y_0 +$ Summe von Produkten $x_\varrho y_\sigma$ mit $0 \leqq \varrho < \varrho_0$.

Da jeder Teiler einer ganzen Ordinalzahl $\xi = \omega^\alpha a$ ($a \in G_0$, $a \neq 0$) von der Form $\omega^\beta b$ ist ($b \in G_0$, $b \neq 0$), also $|\omega^\beta b|$ in N liegt, folgt aus Satz 11 von § 1 der

Satz 17. *Jede ganze Ordinalzahl $\xi = \omega^\alpha a$ ($a \in G_0$) mit $|\xi| > 1$ läßt sich bis auf die Reihenfolge und die Vorzeichen der Faktoren eindeutig in ein endliches Produkt endlicher Potenzen paarweise verschiedener Primzahlen $\neq \pm 1$ zerlegen.*

Ist in Satz 17 $\xi \in G_\sigma$, so sind auch die Faktoren der Primzerlegung aus G_σ.

8. Satz 18. *Zu jeder ganzen Ordinalzahl α gibt es genau einen unmittelbaren Nachfolger α^+ und genau einen unmittelbaren Vorgänger α^-.*

Beweis. Es gibt höchstens einen unmittelbaren Nachfolger und höchstens einen unmittelbaren Vorgänger. Gilt für eine ganze Ordinalzahl ξ : $\xi > 0$ ($\xi < 0$), so ist $\xi \geqq 1$ ($\xi \leqq -1$); denn ist $\xi = G(m, n)$, so ist wegen $\xi < 0$ ($\xi > 0$): $m > n$ ($m < n$), also $n + 1 \leqq m$ ($m + 1 \leqq n$), also wegen $1 = G(1, 0)$ ($-1 = G(0, 1)$): $\xi \geqq 1$ ($\xi \leqq -1$). Es ist $\alpha < \alpha + 1$ ($\alpha - 1 < \alpha$); denn bei $\alpha = G(m, n)$ und $1 = G(1, 0)$ ($-1 = G(0, 1)$) ist $m + n < m + n + 1$. Für jede ganze Ordinalzahl ξ mit $\alpha < \xi$ ($\xi < \alpha$) ist aber $\xi - \alpha > 0$ ($\xi - \alpha < 0$), also $\xi - \alpha \geqq 1$ ($\xi - \alpha \leqq -1$), also $\alpha + 1 \leqq \alpha + (\xi - \alpha) = \xi$ ($\xi = \alpha + (\xi - \alpha) \leqq \alpha - 1$); es gibt demnach kein ξ mit $\alpha < \xi < \alpha + 1$ ($\alpha - 1 < \xi < \alpha$).

Ist $\alpha \in G_\sigma$, so auch $\alpha^+, \alpha^- \in G_\sigma$. Wegen $\alpha^+ = \alpha + 1$, $\alpha^- = \alpha - 1$ gilt sofort: $(\alpha^+)^- = (\alpha^-)^+ = \alpha$. Die in Satz 8 angegebene isomorphe Abbildung φ (bzw. ihre Einschränkungen φ_σ auf die G_σ) ist auch isomorph hinsichtlich der Nachfolgerbildung; d. h., es gilt $\varphi(\alpha^+) = \varphi(\alpha)'$ (bzw. $\varphi_\sigma(\alpha^+) = \varphi_\sigma(\alpha)'$). Man kann also auch „$^+$“ und „$'$“ identifizieren und hat für natürliche Ordinalzahlen α : $\alpha^+ = \alpha'$. Wir nennen $\lambda \in G$ eine *ganze Limeszahl*, falls es natürliche Limeszahlen $m, n \in N$ gibt mit $\lambda = m - n$. Die natürlichen Limeszahlen sind dann genau diejenigen ganzen Limeszahlen λ mit einer Darstellung $\lambda = m - 0$. Ist $\lambda = m - n$ (m, n natürliche Limeszahlen) eine ganze Limeszahl und ist $\lambda \in G_\sigma$, so gibt es natürliche Limeszahlen $m^*, n^* \in N_\sigma$ mit $\lambda = m^* - n^*$. Ist nämlich $\lambda \in G_\sigma$, so gibt es natürliche Ordinalzahlen $p, q \in N_\sigma$ mit $\lambda = p - q$; dabei ist also $m + q = n + p$. Sind p, q schon natürliche Limeszahlen, so hätte man $m^* = p$, $n^* = q$. Andernfalls wäre wegen $m + q = n + p$ (m, n enthalten in ihrer Cantorschen Normalform als Limeszahlen kein Glied mit ω^0): $p = m^* + k$, $q = n^* + k$, wo m^*, n^* natürliche Limeszahlen sind und $k \in N_0$, $k > 0$. Dann ist aber $\lambda = m^* - n^*$ und $m^*, n^* \in N_\sigma$ wegen $m^* < p$ und $n^* < q$.

In Anlehnung an den klassischen Fall gilt das folgende Peanosche *Axiomensystem für ganze Ordinalzahlen*:

Satz 19. (1) *Alle ganzen Limeszahlen sind ganze Ordinalzahlen.*

(2) *Zu jeder ganzen Ordinalzahl gibt es genau einen unmittelbaren Nachfolger.*

(3) *Die ganzen Limeszahlen sind von allen ihren sukzessiven unmittelbaren Nachfolgern verschieden.*

(4) *Zu jeder ganzen Ordinalzahl gibt es genau einen unmittelbaren Vorgänger.*

(5) *Die Klasse der ganzen Ordinalzahlen ist Teilklasse einer jeden Klasse, die alle ganzen Limeszahlen enthält und mit einer ganzen Ordinalzahl auch deren unmittelbaren Nachfolger und unmittelbaren Vorgänger.*

Beweis. (1) und (3) sind trivial, (2) und (4) folgen aus Satz 18. (5) Es sei G^* eine Klasse, die alle ganzen Limeszahlen enthält und mit einer ganzen Ordinalzahl auch deren unmittelbaren Nachfolger und unmittelbaren Vorgänger. Es ist zu zeigen: $G \subseteq G^*$. N^* sei die Klasse aller Paare $[m, n]$ natürlicher Ordinalzahlen, die ganze Zahlen aus G^* repräsentieren. Es genügt dann zu zeigen, daß N^* die Klasse aller Paare $[m, n]$ natürlicher Ordinalzahlen ist. Da alle ganzen Limeszahlen in G^* liegen, so gehören alle Paare $[\lambda, \mu]$, wo λ, μ natürliche Limeszahlen sind, zu N^*. Gehört für eine feste natürliche Limeszahl μ $[k, \mu]$ zu N^*, so auch $[k', \mu]$; denn wenn $[k, \mu] \in N^*$, so gibt es eine ganze Ordinalzahl $\alpha = G(k, \mu) \in G^*$, dann ist aber auch $\alpha^+ = \alpha + 1 = G(k + 1, \mu) = G(k', \mu) \in G^*$, also $[k', \mu] \in N^*$. Es liegen also für jede natürliche Limeszahl μ alle Paare $[m, \mu] \in N^*$. Ist für eine feste natürliche Ordinalzahl m $[m, k] \in N^*$, so auch $[m, k'] \in N^*$; denn wenn $\alpha = G(m, k) \in G^*$, so auch $\alpha^- = \alpha - 1 = G(m, k + 1) = G(m, k') \in G^*$, also $[m, k'] \in N^*$. Also ist N^* die Klasse aller Paare $[m, n]$ natürlicher Ordinalzahlen.

Für die Mengen G_σ gilt dann das Peanosche *Axiomensystem* in der Form:

(1) *Alle ganzen Limeszahlen $\lambda \in G_\sigma$ sind Elemente von G_σ.*

(2) *Zu jedem $\alpha \in G_\sigma$ gibt es genau einen unmittelbaren Nachfolger $\alpha^+ \in G_\sigma$.*

(3) *Die ganzen Limeszahlen $\lambda \in G_\sigma$ sind von allen ihren sukzessiven unmittelbaren Nachfolgern verschieden.*

(4) *Zu jedem $\alpha \in G_\sigma$ gibt es genau einen unmittelbaren Vorgänger $\alpha^- \in G_\sigma$.*

(5) *G_σ ist Teilmenge einer jeden Menge G^*, die alle ganzen Limeszahlen von G_σ enthält und mit einem $\alpha \in G_\sigma$ auch α^+ und α^-.*

Um einen sinnvollen Begriff „transfinites Peano-System" (bezüglich ganzzahliger Strukturen) definieren zu können, braucht man noch eine axiomatische Fassung gewisser Anordnungseigenschaften der ganzen Limeszahlen. Dies wird aber durch Rückgang auf die natürlichen Limeszahlen am einfachsten in der nun folgenden algebraischen Charakterisierung zum Ausdruck gebracht, weshalb wir uns gleich dieser Charakterisierung zuwenden und auf Isomorphiebetrachtungen in den weniger wichtigen Peanosystemen verzichten.

Die ganzen Ordinalzahlen aus G bilden einen geordneten (kommutativen) Ring mit Einselement. Darüber hinaus gelten noch die folgenden Axiome:

Axiome der Limeselemente.

(1) *Alle natürlichen Limeszahlen sind ganze Ordinalzahlen.*

(2) *Sind λ_1, λ_2 natürliche Limeszahlen, so auch $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.*

(3) *Sind λ, μ natürliche Limeszahlen und ist $\lambda < \mu$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n: $\lambda + n < \mu$.*

Beweis. (1) ist trivial. (2) folgt aus der Cantorschen Normalform für natürliche Ordinalzahlen. (Eine natürliche Ordinalzahl ist Limeszahl genau dann, wenn in ihrer Cantorschen Normalform das Glied mit der Potenz ω^0 fehlt.) (3) $\lambda + 0 < \mu$; ist $\lambda + n < \mu$, so auch $\lambda + (n + 1) < \mu$; denn wäre

$$\lambda + n < \mu \leqq \lambda + (n + 1),$$

so wäre $(\lambda + n) + 1$ nicht der unmittelbare Nachfolger von $(\lambda + n)$, falls $\mu < \lambda + (n + 1)$ ist; $\mu = (\lambda + n) + 1$ ist unmöglich, da μ natürliche Limeszahl ist und daher nicht der Nachfolger von $(\lambda + n)$ sein kann.

Minimalaxiom.

Die Klasse der ganzen Ordinalzahlen ist Teilklasse einer jeden Klasse, die alle natürlichen Limeszahlen und 1 *enthält und mit ganzen Ordinalzahlen* α, β *auch* $(\alpha + \beta)$ *und* $(-\alpha)$.

Dieses Axiom folgt unmittelbar aus Axiom (5) des PEANO-Systems für natürliche Ordinalzahlen und aus Satz 9 dieses Paragraphen.

Archimedisches Axiom.

Zu ganzen Ordinalzahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *gibt es eine natürliche Ordinalzahl* n *mit* $\beta \cdot n > \alpha$.

Beweis. Ist $\alpha = p - q$ bei $p, q \in N$, so ist $p \geqq \alpha$. (Es ist ja $q \geqq 0$, also auch $\alpha + 0 \leqq (p - q) + q = p$.) Dann ist wegen $\beta > 0 : \beta \geqq 1$, also $\beta \cdot p \geqq p \geqq \alpha$, also $\beta(p + 1) = \beta p + \beta > p \geqq \alpha$; also $n = p + 1$.

Da sich jede natürliche Ordinalzahl m als $m = \lambda + n$ darstellen läßt, wo λ eine natürliche Limeszahl und n eine natürliche Zahl ist, läßt sich das Archimedische Axiom auch so aussprechen: *Zu ganzen Ordinalzahlen* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *gibt es eine natürliche Limeszahl* λ *und eine natürliche Zahl* n *mit* $\beta \cdot (\lambda + n) > \alpha$.

Will man in Anlehnung an den klassischen Fall die ganzen Ordinalzahlen algebraisch als Ring bis auf Isomorphie festlegen, so ist es zweckmäßig, neben der Null auch die Menge aller natürlichen Limeszahlen als Grundbegriff — *Menge der Limeselemente des Ringes* genannt — unter die üblichen in einem Ring axiomatisch eingeführten Begriffe aufzunehmen und durch einige zusätzliche Axiome zu charakterisieren. Da die Limeselemente eine Art transfinites Gerüst des Ringes bilden, wird es notwendig, für die Durchführbarkeit des Isomorphiebeweises zu fordern, daß Summe und Produkt von Limeselementen und die Ordnungsbeziehung zwischen Limeselementen von vornherein, unabhängig von dem jeweils betrachteten speziellen Ring, festliegen. Dies erreicht man, indem man die Menge der Limeselemente eines Ringes genauer als (im allgemeinen transfinite) Folge vorgibt und Addition, Multiplikation und die Ordnung von Limeselementen im Indexbereich dieser Folge fixiert. Wir werden zunächst — da hier schon alles Wesentliche hervortritt — die Fixierung in spezieller Weise vornehmen unter Verwendung der natürlichen Summe, des natürlichen Produktes und der üblichen Ordnung von Indizes (die ja natürliche Ordinalzahlen sind) und im Anschluß daran das allgemeine Fixierungsverfahren anführen.

Die ganzen Ordinalzahlen sind schließlich unter Berücksichtigung des eben Gesagten als transfiniter minimaler geordneter Ring mit Einselement bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert, was folgendes bedeutet:

Wir definieren zunächst: M, Λ, $+$, $\cdot$, $<$, 0, 1 bilden einen *transfiniten minimalen geordneten Ring mit Einselement* genau dann, wenn gilt: M, $+$, $\cdot$, $<$, 0, 1 bilden einen geordneten (kommutativen) Ring mit Einselement (wobei M eine Klasse sei), Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi \in N}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern; es gelten noch die folgenden Axiome:

I. Axiome der Limeselemente.

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für jedes $\xi \in N$; $\Lambda_0 = 0$.

(2) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta$.
(Das Zeichen „$<$“ bedeutet links die Ordnungsbeziehung des Ringes, rechts die Ordnungsbeziehung der natürlichen Ordinalzahlen.)

(3) Λ ist gegenüber $+, \cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften
$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi + \eta = \zeta$, $\Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi \cdot \eta = \zeta$.
(Die Zeichen „$+$“, „$\cdot$“ bedeuten links die Operationen des Ringes, rechts die Hessenbergschen Operationen zwischen natürlichen Ordinalzahlen.)

(4) Ist $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta$, so gilt für alle $n \in N_0$: $\Lambda_\xi + n \cdot 1 < \Lambda_\eta$, wobei $n \cdot 1$ die n-malige Addition von 1 bedeute.

II. Minimalaxiom.

Voraussetzung. M^* Klasse, $\Lambda_\xi \in M^*$ $(\xi \in N)$, $1 \in M^*$; $x, y \in M \cap M^* \to (x + y)$, $(-x)$, $\in M^*$.

Behauptung. $M \subseteq M^*$.

Aus I (4) folgt u. a.: Ist $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta$, so gilt für alle $n, m \in N_0$: $\Lambda_\xi + n \cdot 1 < \Lambda_\eta - m \cdot 1$.
Aus I (3), (4) folgt u. a.: Ist $\Lambda_\xi - \Lambda_\eta < \Lambda_{\bar{\xi}} - \Lambda_{\bar{\eta}}$, so gilt für alle $n \in N_0$:

$$\Lambda_\xi - \Lambda_\eta + n \cdot 1 < \Lambda_{\bar{\xi}} - \Lambda_{\bar{\eta}}.$$

Hilfssatz. *Bilden M, Λ, $+$, $\cdot$, $<$, 0, 1 einen transfiniten minimalen geordneten Ring mit Einselement, so gibt es zu jedem $x \in M$ genau ein Paar $[\lambda, g]$ mit $\lambda \in M$, $g \in G_0$, $\lambda = \Lambda_\xi - \Lambda_\eta$ für gewisse $\xi, \eta \in N$; $x = \lambda + g \cdot 1$, wobei $g \cdot 1$ die g-malige Addition von 1 bedeute.*

Beweis. Ist $x = \Lambda_\xi$ für ein $\xi \in N$, so ist $[\Lambda_\xi, 0]$ ein solches Paar $[\lambda, g]$ für x; denn es ist $x = \Lambda_\xi = \lambda + g \cdot 1$ bei $\lambda = \Lambda_\xi - \Lambda_0$ und $g = 0$. Ist allgemein $[\lambda, g]$ ein Paar für x mit etwa $\lambda = \Lambda_\eta - \Lambda_{\bar{\eta}}$, so wäre

$$\Lambda_\xi = x = \lambda + g \cdot 1 = (\Lambda_\eta - \Lambda_{\bar{\eta}}) + g \cdot 1.$$

Für $\Lambda_\xi = \lambda$ wäre $g = 0$, also $[\lambda, g] = [\Lambda_\xi, 0]$. Für $\Lambda_\xi < \lambda$ wäre $g < 0$, also für $n = -g$: $\Lambda_\xi + n \cdot 1 = \lambda$ im Widerspruch zu I (4). Für $\lambda < \Lambda_\xi$ wäre $g > 0$ und $\lambda + g \cdot 1 = \Lambda_\xi$ im Widerspruch zu I (4). Also ist $[\Lambda_\xi, 0]$ das einzige Paar für x. Ist jetzt $x = 1$, dann ist $[0, 1]$ ein Paar für x; denn es ist $x = 1 = \lambda + g \cdot 1$ bei $\lambda = \Lambda_0 - \Lambda_0 = 0$ und $g = 1$. Ist allgemein $[\lambda, g]$ ein Paar für x mit etwa

$$\lambda = \Lambda_\eta - \Lambda_{\bar{\eta}},$$

so wäre $1 = x = \lambda + g \cdot 1 = (\Lambda_\eta - \Lambda_{\bar{\eta}}) + g \cdot 1$. Für $g \leqq 0$ und $n = -g$ wäre dann $(n + 1) \cdot 1 = \Lambda_\eta - \Lambda_{\bar{\eta}}$, also $\Lambda_{\bar{\eta}} < \Lambda_\eta$ und $\Lambda_{\bar{\eta}} + (n + 1) \cdot 1 = \Lambda_\eta$, Widerspruch. Für $g > 1$ ist $(\Lambda_{\bar{\eta}} - \Lambda_\eta) = (g - 1) \cdot 1$, also $\Lambda_\eta < \Lambda_{\bar{\eta}}$ und

$$\Lambda_\eta + (g - 1) \cdot 1 = \Lambda_{\bar{\eta}},$$

Widerspruch. Also bleibt nur $g = 1$ übrig, dann muß aber $\lambda = 0$ sein, also $[0, 1]$ eindeutig für x bestimmt. Es gebe nun für ein $x \in M$ ein eindeutig bestimmtes Paar $[\lambda_x, g_x]$ mit $x = \lambda_x + g_x \cdot 1$. Dann ist $[-\lambda_x, -g_x]$ ein Paar für $(-x)$. Ist allgemein $[\lambda, g]$ ein Paar für $(-x)$, so wäre doch $(-x) = \lambda + g \cdot 1$, also $x = -\lambda - g \cdot 1$, also muß nach Voraussetzung $\lambda = -\lambda_x$ und $g = -g_x$ sein, wo-

mit $[-\lambda_x, -g_x]$ eindeutig bestimmt ist. Gebe es für $x, y \in M$ eindeutig bestimmte Paare $[\lambda_x, g_x]$, $[\lambda_y, g_y]$, dann ist nach I (3) $[\lambda_x + \lambda_y, g_x + g_y]$ ein Paar für $(x + y)$. Ist allgemein $[\lambda, g]$ ein Paar für $(x + y)$, so wäre doch

$$(x + y) = \lambda + g \cdot 1 = (\lambda_x + \lambda_y) + (g_x + g_y) \cdot 1 .$$

Für $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$ wäre $g = g_x + g_y$. Für $\lambda < \lambda_x + \lambda_y$ wäre $g > g_x + g_y$, also $\lambda + [g - (g_x + g_y)] \cdot 1 = \lambda_x + \lambda_y$, Widerspruch. Für $\lambda > \lambda_x + \lambda_y$ wäre $g < g_x + g_y$, also $(\lambda_x + \lambda_y) + [(g_x + g_y) - g] \cdot 1 = \lambda$, Widerspruch. Also ist $[\lambda_x + \lambda_y, g_x + g_y]$ eindeutig bestimmt.

Die Umkehrung des Hilfssatzes, daß es zu jedem Paar $[\lambda, g]$ genau ein $x \in M$ gibt mit $x = \lambda + g \cdot 1$, ist trivial.

Satz 20 (Isomorphiesatz). *Bilden* $M_1, \Lambda_1, \underset{1}{+}, \cdot, <, 0, 1$ *und* $M_2, \Lambda_2, \underset{2}{+}, \cdot, <, 0, 1$, *transfinite minimale geordnete Ringe mit Einselement, so sind diese Ringe isomorph; d. h., es gibt eine eineindeutige Abbildung* φ *von* M_1 *auf* M_2 *mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \text{ für } \xi \in N,\ \varphi(1) = 1,\ x < y \to \varphi(x) < \varphi(y),$$

$$\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y),\ \ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Beweis. Für $x \in M_1$, $y \in M_2$ seien mit $[\lambda_x{}^1, g_x{}^1]$ bzw. $[\lambda_y{}^2, g_y{}^2]$ die nach obigem Hilfssatz eindeutig bestimmten Paare $[\lambda, g]$ bezeichnet. ψ sei die Abbildung, die jedem $\lambda \in M_1$, welches sich in der Form $\Lambda_{1\xi} \underset{1}{-} \Lambda_{1\eta}$ darstellen läßt, das Element $\mu = \Lambda_{2\xi} \underset{2}{-} \Lambda_{2\eta} \in M_2$ zuordnet. Wegen

$$\Lambda_{1\xi} \underset{1}{-} \Lambda_{1\eta} = \Lambda_{1\bar{\xi}} \underset{1}{-} \Lambda_{1\bar{\eta}} \leftrightarrow \xi + \bar{\eta} = \bar{\xi} + \eta \leftrightarrow \Lambda_{2\xi} \underset{2}{-} \Lambda_{2\eta} = \Lambda_{2\bar{\xi}} \underset{2}{-} \Lambda_{2\bar{\eta}}$$

ist ψ eine eineindeutige Abbildung aller $\lambda \in M_1$ der Form $\Lambda_{1\xi} \underset{1}{-} \Lambda_{1\eta}$ auf alle $\mu \in M_2$ der Form $\Lambda_{2\xi} \underset{2}{-} \Lambda_{2\eta}$. Wir ordnen nun jedem $x \in M_1$ eindeutig das Element $\varphi(x) = \psi(\lambda_x{}^1) \underset{2}{+} g_x{}^1 \cdot 1$ aus M_2 zu. Für $y = \varphi(x)$ ist also $[\lambda_y{}^2, g_y{}^2] = [\psi(\lambda_x{}^1), g_x{}^1]$. φ ist sofort eine eindeutige Abbildung von M_1 auf M_2; φ ist auch — da ψ eineindeutig ist — eineindeutig. Es ist $\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \psi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi}$ und $\varphi(1) = 1 \cdot 1 = 1$. Ist $x, y \in M_1$ und $x \underset{1}{<} y$, so ist also $\lambda_x{}^1 + g_x{}^1 \cdot 1 < \lambda_y{}^1 + g_y{}^1 \cdot 1$; aus I (4) folgt dann: $\lambda_x{}^1 \underset{1}{\leqq} \lambda_y{}^1$. Es sei $\lambda_x{}^1 = \Lambda_{1\xi} \underset{1}{-} \Lambda_{1\eta}$, $\lambda_y{}^1 = \Lambda_{1\bar{\xi}} \underset{1}{-} \Lambda_{1\bar{\eta}}$; dann ist

$$\psi(\lambda_x{}^1) = \Lambda_{2\xi} \underset{2}{-} \Lambda_{2\eta},\ \psi(\lambda_y{}^1) = \Lambda_{2\bar{\xi}} \underset{2}{-} \Lambda_{2\bar{\eta}}.$$

Wegen $\lambda_x{}^1 \underset{1}{\leqq} \lambda_y{}^1$ ist $\Lambda_{1\xi} \underset{1}{+} \Lambda_{1\bar{\eta}} \underset{1}{\leqq} \Lambda_{1\bar{\xi}} \underset{1}{+} \Lambda_{1\eta}$, also nach I (2), (3) auch

$$\Lambda_{2\xi} \underset{2}{+} \Lambda_{2\bar{\eta}} \underset{2}{\leqq} \Lambda_{2\bar{\xi}} \underset{2}{+} \Lambda_{2\eta},$$

also $\Lambda_{2\xi} \underset{2}{-} \Lambda_{2\eta} \underset{2}{\leqq} \Lambda_{2\bar{\xi}} \underset{2}{-} \Lambda_{2\bar{\eta}}$, also $\psi(\lambda_x{}^1) \underset{2}{\leqq} \psi(\lambda_y{}^1)$, wobei aus $\lambda_x{}^1 \underset{1}{<} \lambda_y{}^1$ auch $\psi(\lambda_x{}^1) \underset{2}{<} \psi(\lambda_y{}^1)$ folgt. Ist nun $\lambda_x{}^1 \underset{1}{<} \lambda_y{}^1$, so $\psi(\lambda_x{}^1) \underset{2}{<} \psi(\lambda_y{}^1)$, also auch

$$\psi(\lambda_x{}^1) \underset{2}{+} g_x{}^1 \cdot 1 \underset{2}{<} \psi(\lambda_y{}^1) \underset{2}{+} g_y{}^1 \cdot 1$$

nach I (4), also $\varphi(x) \underset{2}{<} \varphi(y)$. Ist $\lambda_x^1 = \lambda_y^1$, so muß wegen $x < y$ dann $g_x^1 \underset{1}{<} g_y^1$ sein, also wegen $\psi(\lambda_x^1) = \psi(\lambda_y^1)$ auch $\psi(\lambda_x^1) + g_x^1 \cdot 1 \underset{2}{<} \psi(\lambda_y^1) + g_y^1 \cdot 1$, also $\varphi(x) \underset{2}{<} \varphi(y)$. Ist jetzt $x, y \in M_1$, so ist $(x + y) = (\lambda_x^1 + \lambda_y^1) + (g_x^1 + g_y^1) \cdot 1$, also $\varphi(x + y) = \psi(\lambda_x^1 + \lambda_y^1) + (g_x^1 + g_y^1) \cdot 1$. Für $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ist noch zu zeigen: $\psi(\lambda_x^1 + \lambda_y^1) = \psi(\lambda_x^1) + \psi(\lambda_y^1)$. Ist aber etwa $\lambda_x^1 = \Lambda_{1\xi} - \Lambda_{1\eta}$, $\lambda_y^1 = \Lambda_{1\bar{\xi}} - \Lambda_{1\bar{\eta}}$, so ist nach I (3)

$$\psi(\lambda_x^1 + \lambda_y^1) = (\Lambda_{2\xi} + \Lambda_{2\bar{\xi}}) - (\Lambda_{2\eta} + \Lambda_{2\bar{\eta}}) = (\Lambda_{2\xi} - \Lambda_{2\eta}) + (\Lambda_{2\bar{\xi}} - \Lambda_{2\bar{\eta}}) =$$
$$= \psi(\lambda_x^1) + \psi(\lambda_y^1).$$

Ist schließlich wieder $x, y \in M_1$, so ist

$$x \cdot y = (\lambda_x^1 + g_x^1 \cdot 1) \cdot (\lambda_y^1 + g_y^1 \cdot 1) = \lambda_x^1 \cdot \lambda_y^1 + g_x^1 \cdot \lambda_y^1 + g_y^1 \cdot \lambda_x^1 +$$
$$+ (g_x^1 \cdot g_y^1) \cdot 1.$$

Ist $\lambda_x^1 = \Lambda_{1\xi} - \Lambda_{1\eta}$, $\lambda_y^1 = \Lambda_{1\bar{\xi}} - \Lambda_{1\bar{\eta}}$, so ist

$$\lambda_x^1 \cdot \lambda_y^1 = (\Lambda_{1\xi} - \Lambda_{1\eta}) \cdot (\Lambda_{1\bar{\xi}} - \Lambda_{1\bar{\eta}}) = \Lambda_{1\xi} \cdot \Lambda_{1\bar{\xi}} - \Lambda_{1\eta} \cdot \Lambda_{1\bar{\xi}} - \Lambda_{1\xi} \cdot \Lambda_{1\bar{\eta}} +$$
$$+ \Lambda_{1\eta} \cdot \Lambda_{1\bar{\eta}};$$

also

$$\varphi(\lambda_x^1 \cdot \lambda_y^1) = \varphi(\Lambda_{1\xi} \cdot \Lambda_{1\bar{\xi}}) + \varphi(-\Lambda_{1\eta} \cdot \Lambda_{1\bar{\xi}}) + \varphi(-\Lambda_{1\xi} \cdot \Lambda_{1\bar{\eta}}) + \varphi(\Lambda_{1\eta} \cdot \Lambda_{1\bar{\eta}}),$$

also nach I (3):

$$\varphi(\lambda_x^1 \cdot \lambda_y^1) = \Lambda_{2\xi} \cdot \Lambda_{2\bar{\xi}} - \Lambda_{2\eta} \cdot \Lambda_{2\bar{\xi}} - \Lambda_{2\xi} \cdot \Lambda_{2\bar{\eta}} + \Lambda_{2\eta} \cdot \Lambda_{2\bar{\eta}} =$$
$$= (\Lambda_{2\xi} - \Lambda_{2\eta}) \cdot (\Lambda_{2\bar{\xi}} - \Lambda_{2\bar{\eta}}) = \psi(\lambda_x^1) \cdot \psi(\lambda_y^1).$$

Ebenfalls erhält man: $\varphi(g_x^1 \cdot \lambda_y^1) = g_x^1 \cdot \psi(\lambda_y^1)$, $\varphi(g_y^1 \cdot \lambda_x^1) = g_y^1 \cdot \psi(\lambda_x^1)$; trivial ist $\varphi([g_x^1 \cdot g_y^1] \cdot 1) = (g_x^1 \cdot g_y^1) \cdot 1$. Insgesamt ergibt sich schließlich:

$$\varphi(x \cdot y) = \psi(\lambda_x^1) \cdot \psi(\lambda_y^1) + g_x^1 \cdot \psi(\lambda_y^1) + g_y^1 \cdot \psi(\lambda_x^1) + (g_x^1 \cdot g_y^1) \cdot 1 =$$
$$= (\psi(\lambda_x^1) + g_x^1 \cdot 1) \cdot (\psi(\lambda_y^1) + g_y^1 \cdot 1) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Aus dem Minimalaxiom II für transfinite Ringe und Satz 20 folgt, daß es zwischen zwei transfiniten minimalen geordneten Ringen mit Einselement sogar genau eine isomorphe Abbildung gibt. Wie weiterhin aus dem Beweis von Satz 20 ersichtlich ist, genügt es für die Durchführbarkeit dieses Isomorphiebeweises, in der Definition der transfiniten Ringe statt I (2) und I (3) zu fordern: (Dies ist das oben angekündigte allgemeine Fixierungsverfahren für Summe, Produkt und Ordnung der Limeselemente.)

I (2*) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi S \eta$.

I (3*) Λ ist gegenüber $+, \cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften

$$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow F_1(\xi, \eta) = \zeta, \quad \Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow F_2(\xi, \eta) = \zeta.$$

Dabei ist S eine von vornherein unabhängig von den einzelnen Ringen vorgegebene binäre Relation in N, und F_1, F_2 sind ebensolche unabhängigen eindeutigen Abbildungen der Klasse aller Paare $[\xi, \eta]$ natürlicher Ordinalzahlen in N.

Auf Grund des Isomorphiesatzes gilt in jedem transfiniten minimalen geordneten Ring mit Einselement (mit den ursprünglichen spezialisierten S, F_1, F_2) das folgende (*transfinite*) *Archimedische Axiom*: *Zu Elementen* $\alpha, \beta \in M$ *mit* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *gibt es ein* Λ_ξ *und ein* $n \in N_0$ *mit* $\beta \cdot (\Lambda_\xi + n \cdot 1) > \alpha$, *wobei* $n \cdot 1$ *die n-malige Addition von* 1 *bedeute.*

Beschränkt man sich auf G_σ, so bilden auch die ganzen Ordinalzahlen aus G_σ einen geordneten (kommutativen) Ring mit Einselement, und es gelten analoge *Axiome der Limeselemente*, *Minimalaxiom* und *Archimedisches Axiom*, nur daß jetzt alles auf G_σ relativiert ist; im Minimalaxiom kann man Mengen statt wie früher Klassen verwenden. Für G_0 fallen Minimalaxiom und Archimedisches Axiom mit den bekannten klassischen Axiomen der Minimalität und des Archimedes zusammen. Die ganzen Ordinalzahlen aus G_σ sind schließlich eindeutig bis auf Isomorphie festgelegt als transfiniter minimaler geordneter Ring mit Einselement vom Typ ω_σ, was folgendes bedeutet: Das 7-Tupel $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ heiße ein *transfiniter minimaler geordneter Ring mit Einselement vom Typ* ω_σ genau dann, wenn gilt: $[M, +, \cdot, <, 0, 1]$ ist ein geordneter (kommutativer) Ring mit Einselement, Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi < T}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern vom Tpy T, wobei $T = 1$ für $\sigma = 0$ und $T = \omega_\sigma$ für $\sigma > 0$ (ω_σ reguläre Anfangszahl); es gelten noch die folgenden Axiome:

I. Axiome der Limeselemente.

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für $\xi < T$; $\Lambda_0 = 0$.

(2) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta$.

(3) Λ ist gegenüber $+, \cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften
$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi + \eta = \zeta$, $\Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi \cdot \eta = \zeta$.

(4) Ist $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta$, so gilt für alle $n \in N_0$: $\Lambda_\xi + n \cdot 1 < \Lambda_\eta$, wobei $n \cdot 1$ die n-malige Addition von 1 bedeute.

II. Minimalaxiom.

Voraussetzung. M^* Menge, $\Lambda_\xi \in M^* (\xi < T)$, $1 \in M^*$; $x, y \in M \cap M^* \to (x + y)$, $(-x) \in M^*$.

Behauptung. $M \subseteq M^*$.

Wie im absoluten Fall beweist man schließlich die folgenden Sätze:

Hilfssatz. *Ist* $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ *ein transfiniter minimaler geordneter Ring mit Einselement vom Typ* ω_σ, *so gibt es zu jedem* $x \in M$ *genau ein Paar* $[\lambda, g]$ *mit* $\lambda \in M$, $g \in G_0$, $\lambda = \lambda_\xi - \Lambda_\eta$ *für gewisse* $\xi, \eta < T$; $x = \lambda + g \cdot 1$, *wobei* $g \cdot 1$ *die g-malige Addition von* 1 *bedeute.*

Satz 21 (Isomorphiesatz). *Sind* $[M_1, \Lambda_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\cdot}, \underset{1}{<}, \underset{1}{0}, \underset{1}{1}]$ *und* $[M_2, \Lambda_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\cdot}, \underset{2}{<}, \underset{2}{0}, \underset{2}{1}]$ *transfinite minimale geordnete Ringe mit Einselement vom Typ* ω_σ *so sind diese Ringe isomorph; d. h., es gibt eine eineindeutige Abbildung* φ *von* M_1 *auf* M_2 *mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \text{ für } \xi < T,\ \varphi(\underset{1}{1}) = \underset{2}{1},\ x \underset{1}{<} y \to \varphi(x) \underset{2}{<} \varphi(y),$$

$$\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y), \quad \varphi(x \underset{1}{\cdot} y) = \varphi(x) \underset{2}{\cdot} \varphi(y).$$

Es gelten analoge Bemerkungen wie im Anschluß an den absoluten Isomorphiesatz (Satz 20).

§ 3 Rationale Ordinalzahlen

1. Für ganze Ordinalzahlen g_1, h_1, g_2, h_2 mit $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$ definieren wir die *Quotientengleichheit* geordneter Paare zu: $[g_1, h_1] \overset{=}{_Q} [g_2, h_2]$ genau dann, wenn $g_1 h_2 = g_2 h_1$ ist. „$\overset{=}{_Q}$“ ist eine Äquivalenzrelation, d. h., es gilt

$$[g, h] \overset{=}{_Q} [g, h],$$

$$[g_1, h_1] \overset{=}{_Q} [g_2, h_2] \to [g_2, h_2] \overset{=}{_Q} [g_1, h_1],$$

$$[g_1, h_1] \overset{=}{_Q} [g_2, h_2] \wedge [g_2, h_2] \overset{=}{_Q} [g_3, h_3] \to [g_1, h_1] \overset{=}{_Q} [g_3, h_3].$$

Beweis. $g \cdot h = g \cdot h$. $g_1 h_2 = g_2 h_1 \to g_2 h_1 = g_1 h_2$. $g_1 h_2 = g_2 h_1 \wedge g_2 h_3 = g_3 h_2 \to$ $\to g_1 h_2 g_2 h_3 = g_2 h_1 g_3 h_2 \to (g_1 h_3)(g_2 h_2) = (g_3 h_1)(g_2 h_2)$. Ist $g_2 = 0$, so ist wegen $h_2 \neq 0$ und $g_1 h_2 = g_2 h_1 \wedge g_2 h_3 = g_3 h_2$ auch $g_1 = g_3 = 0$, also $g_1 h_3 = g_3 h_1$. Ist $g_2 \neq 0$, so ist wegen $h_2 \neq 0$ auch $g_2 h_2 \neq 0$, also folgt aus $(g_1 h_3)(g_2 h_2) =$ $= (g_3 h_1)(g_2 h_2)$: $g_1 h_3 = g_3 h_1$.

Man kann also hinsichtlich „$\overset{=}{_Q}$“ Abstraktionsklassen bilden; wir wollen dabei erreichen, daß diese Klassen Mengen werden. Dazu führen wir folgenden Begriff ein: Zu jedem Paar $[g, h]$ ganzer Ordinalzahlen mit $h \neq 0$ gibt es eine kleinste natürliche Ordinalzahl ξ — bezeichnet mit $\mu^Q(g, h)$ —, so daß es ein Paar $[g_0, h_0]$ $(h_0 \neq 0)$ gibt mit $[g_0, h_0] \overset{=}{_Q} [g, h]$ und $g_0, h_0 \in G_\xi$. Es gilt sofort:

$$[g_1 h_1] \overset{=}{_Q} [g_2, h_2] \to \mu^Q g_1, h_1) = \mu^Q (g_2, h_2).$$

Man definiere nun die *durch* $[g, h]$ $(h \neq 0)$ *repräsentierte rationale Ordinalzahl* $R(g, h)$ als die Menge aller Paare $[r, s]$ $(s \neq 0)$ mit $[r, s] \overset{=}{_Q} [g, h]$ und $r, s \in G_{\mu^Q(g,h)}$. Es gilt:

$$R(g, h) \neq \varnothing,$$

$$[g_1, h_1] \in R(g_2, h_2) \to [g_1, h_1] \overset{=}{_Q} [g_2, h_2],$$

$$[g_1, h_1] \overset{=}{_Q} [g_2, h_2] \leftrightarrow R(g_1, h_1) = R(g_2, h_2).$$

Wir nennen schließlich α eine *rationale Ordinalzahl*, falls $\exists\, g\, \exists\, h\ \alpha = R(g, h)$.

Es gilt für rationale Ordinalzahlen α und β:

$$\alpha = \beta \leftrightarrow \forall\, g \forall\, h\, ([g, h] \in \alpha \leftrightarrow [g, h] \in \beta)$$
$$\leftrightarrow \exists\, g \exists\, h\, (g, h] \in \alpha \wedge [g, h] \in \beta)$$
$$\leftrightarrow \forall\, g \forall\, h\, (\alpha = R(g, h) \leftrightarrow \beta = R(g, h))$$
$$\leftrightarrow \exists\, g \exists\, h\, (\alpha = R(g, h) \wedge \beta = R(g, h)).$$

Mit R werde die Klasse aller rationalen Ordinalzahlen bezeichnet und mit R_σ die Menge aller rationalen Ordinalzahlen α, zu denen es ganze Ordinalzahlen g. h gibt mit $\alpha = R(g, h)$ und $g, h \in G_\sigma$. Es ist dann R_0 die Menge der *rationalen Zahlen*. Für die Vereinigung $\bigcup R_\sigma$ aller R_σ gilt: $\bigcup R_\sigma = R$. Ist $\sigma < \tau$ ($\omega_\sigma, \omega_\tau$ seien reguläre Anfangszahlen), so ist $R_\sigma \subset R_\tau$; denn z. B. ist $\alpha = R(\omega_\sigma, 1) \in R_\tau$ (wegen $\omega_\sigma < \omega_\tau$ ist $\omega_\sigma, 1 \in G_\tau$), aber $\alpha \notin R_\sigma$. Ist nämlich $\alpha = R(g, h)$, so ist $[\omega_\sigma, 1] \underset{Q}{=} [g, h]$, also $\omega_\sigma h = g$; wegen $\omega_\sigma \notin G_\sigma$ und $|g| \geqq \omega_\sigma$ (es ist ja $h \neq 0$, also $h \leqq -1$ oder $h \geqq 1$) ist auch $g \notin G_\sigma$; also gibt es keinen Repräsentanten $[g, h]$ von α mit $g, h \in G_\sigma$, also $\alpha \notin R_\sigma$.

2. Die *Anordnungsbeziehung* zwischen rationalen Ordinalzahlen definiere man repräsentantenweise folgendermaßen: $\alpha_1 \underset{R}{<} \alpha_2$[1]) genau dann, wenn gilt:

$$\alpha_1 = R(g_1, h_1) \wedge \alpha_2 = R(g_2, h_2) \to (g_2 h_1 - g_1 h_2)\, h_1 h_2 > 0.$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2. Definiert man wie üblich $\alpha \underset{R}{\leqq} \beta$ zu $\alpha \underset{R}{<} \beta \vee \alpha = \beta$, so ist „$\underset{R}{<}$“ eine irreflexive und „$\underset{R}{\leqq}$“ eine reflexive Ordnung in R (und damit in jedem R_σ).

3. Die *Summe* $\alpha_1 \underset{R}{+} \alpha_2$[1]) rationaler Ordinalzahlen α_1 und α_2 werde definiert als diejenige rationale Ordinalzahl α, für die gilt:

$$\alpha_1 = R(g_1, h_1) \wedge \alpha_2 = R(g_2, h_2) \to \alpha = R(g_1 h_2 + g_2 h_1, h_1 h_2).$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2. Die Mengen R_σ sind gegenüber „$\underset{R}{+}$“ abgeschlossen. $\underset{R}{0}$[1]) sei diejenige rationale Ordinalzahl α mit $[0, 1] \in \alpha$; es ist stets $0 \in R_\sigma$. Die *Inverse* $\underset{R}{(-\alpha)}$[1]) von α sei diejenige rationale Ordinalzahl β mit: $\alpha = R(g, h) \to \beta = R(-g, h)$; R_σ ist dann gegen Inversenbildung abgeschlossen. Aus den Definitionen folgen sofort die Sätze:

Satz 1. (1) $(-(-\alpha)) = \alpha$, (2) $(-0) = 0$,

(3) $(-(\alpha + \beta)) = (-\alpha) + (-\beta)$,

(4) $\alpha < \beta \leftrightarrow (-\beta) < (-\alpha)$.

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „R“ auch weg.

Satz 2.
$$(1)\quad \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$
$$(2)\quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$
$$(3)\quad \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta,$$
$$(4)\quad \alpha + 0 = \alpha,$$
$$(5)\quad \alpha + (-\alpha) = 0.$$

Aus Satz 2 folgt:
$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2,$$
$$\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2,$$
$$\alpha + \beta = \alpha \to \beta = 0.$$

Zu rationalen Ordinalzahlen α und β gibt es genau eine rationale Ordinalzahl γ mit $\alpha + \gamma = \beta$, nämlich $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Man definiert dann die *Differenz* $\alpha \underset{R}{-} \beta$[1]) als diejenige rationale Ordinalzahl γ, für die $\beta \underset{R}{+} \gamma = \alpha$ ist. Es gelten sofort die Sätze:

Satz 3. (1) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$,

(2) $\alpha - \beta = (-(\beta - \alpha))$,

(3) $\alpha - 0 = \alpha, \quad 0 - \alpha = (-\alpha), \quad \alpha - \beta = 0 \leftrightarrow \alpha = \beta$,

(4) $(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma)$.

Satz 4. (1) $\alpha < \beta \leftrightarrow \beta - \alpha > 0$,

(2) $\alpha < \beta \leftrightarrow \exists\, \gamma\, (\gamma > 0 \wedge \alpha + \gamma = \beta)$.

Aus Satz 3 (1) folgt, daß R_σ gegen Differenzbildung abgeschlossen ist.

4. Das *Produkt* $\alpha_1 \underset{R}{\cdot} \alpha_2$[1]) rationaler Ordinalzahlen α_1 und α_2 werde definiert als diejenige rationale Ordinalzahl α, für die gilt

$$\alpha_1 = R(g_1, h_1) \wedge \alpha_2 = R(g_2, h_2) \to \alpha = R(g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2. Die Mengen R_σ sind gegenüber „$\underset{R}{\cdot}$“ abgeschlossen. 1[1]) sei diejenige rationale Ordinalzahl α mit $[1, 0] \in \alpha$; es ist stets $1 \underset{R}{\neq} 0$. Für $\alpha \neq 0$ sei die *Reziproke* α^{-1} diejenige rationale Ordinalzahl β mit: $\alpha \underset{R}{=} R(g, h) \to \beta \underset{R}{=} R(h, g)$; R_σ ist dann gegen Reziprokenbildung abgeschlossen.

Satz 5. (1) $\alpha \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot \beta = (-(\alpha \cdot \beta))$,

(2) $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „R“ auch weg.

Satz 6. (1) $\alpha \neq 0 \to (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, (2) $1^{-1} = 1$,

(3) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \to (\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$,

(4) $\alpha \neq 0 \to (-\alpha)^{-1} = (-(\alpha^{-1}))$,

(5) $\alpha \cdot \beta > 0 \mathrel{.\to} \alpha < \beta \leftrightarrow \beta^{-1} < \alpha^{-1}$, $\alpha \cdot \beta < 0 \mathrel{.\to} \alpha < \beta \leftrightarrow \alpha^{-1} < \beta^{-1}$.

Satz 7. (1) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

(2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

(3) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

(4) $\begin{cases} \beta > 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta < \alpha_2 \cdot \beta, \\ \beta < 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta > \alpha_2 \cdot \beta, \end{cases}$

(5) $\alpha \cdot 1 = \alpha$,

(6) $\alpha \neq 0 \to \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$,

(7) $\alpha \cdot 0 = 0$.

Aus Satz 7 folgt:

$$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 = \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2,$$

$$\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2,$$

$$\alpha < 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 > \beta_2,$$

$$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta = \alpha \to \beta = 1,$$

$$\alpha \cdot \beta = 0 \to \alpha = 0 \vee \beta = 0.$$

Zu rationalen Ordinalzahlen α und β mit $\alpha \neq 0$ gibt es genau eine rationale Ordinalzahl γ mit $\alpha \cdot \gamma = \beta$, nämlich $\gamma = \beta \cdot \alpha^{-1}$. Man definiert dann für $\beta \underset{R}{\neq} 0$ den *Quotienten* $\alpha : \beta$ bzw. $\frac{\alpha}{\beta}$ als diejenige rationale Ordinalzahl γ, für die $\beta \underset{R}{\cdot} \gamma = \alpha$ ist. Es gelten sofort die folgenden Sätze:

Satz 8. (1) $\beta \neq 0 \to \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$,

(2) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \to \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$,

(3) $\alpha \neq 0 \to \frac{0}{\alpha} = 0$, $\frac{\alpha}{1} = \alpha$, $\alpha \neq 0 \to \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}$,

$\beta \neq 0 \mathrel{.\to} \frac{\alpha}{\beta} = 1 \leftrightarrow \alpha = \beta$,

(4) $\beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 \to (\alpha : \beta) : \gamma = \alpha : (\beta \cdot \gamma)$.

Satz 9. (1) $\alpha > 0 \dot{\to} \alpha < \beta \leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1$,

(2) $\alpha > 0 \dot{\to} \alpha < \beta \leftrightarrow \exists \gamma\,(\gamma > 1 \wedge \alpha \cdot \gamma = \beta)$.

Aus Satz 8 (1) folgt, daß R_σ gegen Quotientbildung abgeschlossen ist.

Satz 10. (1) $\beta \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta} \pm \frac{\alpha_2}{\beta} = \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta}$,

(2) $\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta_1} \pm \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2 \pm \alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_2}$,

(3) $\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\beta_1 \cdot \beta_2}$,

(4) $\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0 \wedge \alpha_2 \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\alpha_2 \cdot \beta_1}$.

5. Eine rationale Ordinalzahl α heiße *positiv* bzw. *negativ*, je nachdem $\alpha \underset{R}{>} 0$ oder $\alpha \underset{R}{<} 0$ ist. Es gilt der

Satz 11. (1) $\begin{cases} \alpha > 0 \wedge \beta > 0 \to \alpha + \beta > 0, \\ \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \to \alpha + \beta < 0, \end{cases}$

(2) $(\alpha > 0 \wedge \beta > 0) \vee (\alpha < 0 \wedge \beta < 0) \leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$.

Weiterhin gilt: $\alpha > 0 \leftrightarrow (-\alpha) < 0$, $\alpha < 0 \leftrightarrow (-\alpha) > 0$, $\alpha \neq 0 \leftrightarrow (-\alpha) \neq 0$; $\alpha \neq 0 \dot{\to} \alpha > 0 \leftrightarrow \alpha^{-1} > 0$, $\alpha \neq 0 \dot{\to} \alpha < 0 \leftrightarrow \alpha^{-1} < 0$, $\alpha \neq 0 \leftrightarrow \alpha^{-1} \neq 0$.

Der *absolute Betrag* rationaler Ordinalzahlen wird definiert zu

$$|\alpha|_R^{1)} = \begin{cases} \alpha, \text{ falls } \alpha \underset{R}{\geqq} 0 \\ (-\alpha), \text{ falls } \alpha \underset{R}{<} 0. \end{cases}$$

Dann gilt

Satz 12. (1) $|\alpha| \geqq 0$, $|\alpha| = 0 \leftrightarrow \alpha = 0$,

(2) $|(-\alpha)| = |\alpha|$, $\alpha \neq 0 \to |\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$,

(3) $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$, $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geqq 0$,

(4) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$,

(5) $||\alpha| - |\beta|| \leqq |\alpha - \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$.

Es gilt nicht wie bei ganzen Ordinalzahlen der Satz: $\alpha \in R_\sigma \wedge |\beta| \leqq |\alpha| \to \beta \in R_\sigma$. Als Gegenbeispiel wähle man etwa $\beta^{-1} = R(\omega_\sigma, 1) \notin R_\sigma$, also auch $\beta \notin R_\sigma$; aber $0 < \beta < 1 = \alpha \in R_\sigma$.

α nennen wir eine *ganze rationale Ordinalzahl*, falls es eine ganze Ordinalzahl g gibt mit $\alpha = R(g, 1)$; es gibt dann genau eine solche ganze Ordinalzahl g; denn

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „R" auch weg.

wenn $\alpha = R(g, 1) = R(h, 1)$, so wäre $[g, 1] \underset{Q}{=} [h, 1]$, also $g \cdot 1 = h \cdot 1$, also $g = h$. Es sei $\varphi(\alpha)$ die eineindeutige Abbildung der Klasse aller ganzen rationalen Ordinalzahlen $\alpha \in R$ auf die Klasse G aller ganzen Ordinalzahlen g mit

$$\varphi(\alpha) = g \leftrightarrow \alpha = R(g, 1);$$

dann gilt der

Satz 13. *φ ist eine isomorphe Abbildung; d. h., für ganze rationale Ordinalzahlen α, β gilt*

$$\varphi(\alpha \underset{R}{+} \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta),$$

$$\varphi(\alpha \underset{R}{-} \beta) = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta),$$

$$\varphi(\alpha \underset{R}{\cdot} \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta),$$

$$\alpha \underset{R}{<} \beta \leftrightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta),$$

$$\varphi(\underset{R}{0}) = 0, \quad \varphi(\underset{R}{1}) = 1, \quad \varphi(\underset{R}{-} \alpha) = -\varphi(\alpha),$$

$$\varphi(\underset{R}{|\alpha|}) = |\varphi(\alpha)|.$$

Schränken wir $\varphi(\alpha)$ auf R_σ ein, betrachten also die eineindeutige Abbildung $\varphi_\sigma(\alpha)$ der Menge aller ganzen rationalen Ordinalzahlen $\alpha \in R_\sigma$ auf G_σ mit $\varphi_\sigma(\alpha) = g \leftrightarrow \alpha = R(g, 1)$, so ist φ_σ ebenfalls eine derartige isomorphe Abbildung, jetzt allerdings innerhalb R_σ, G_σ. Nach Satz 13 und dieser Bemerkung ist G und jedes G_σ isomorph in R bzw. R_σ eingebettet; man kann also die eingeführten Symbole im Bereich der rationalen Ordinalzahlen zusammenfallen lassen mit den bisherigen Symbolen im Bereich der ganzen Ordinalzahlen ($+$, $-$, $\cdot$, $<$, 0, 1, $(- \cdots)$, $|\cdots|$); statt α, wo $\alpha = R(g, 1)$ ist, schreiben wir einfach g. Die ganzen rationalen Ordinalzahlen nennen wir einfach wieder *ganze Ordinalzahlen.*

Satz 14. *Zu jeder rationalen Ordinalzahl $\alpha \in R_\sigma$ gibt es ganze Ordinalzahlen g und $h \neq 0$ aus G_σ mit $\alpha = \frac{g}{h}$.*

Beweis. Ist $\alpha = R(g, h)$, so ist $\alpha = R(g, 1) \cdot R(1, h) = g : h$; ist dabei $\alpha \in R_\sigma$, so lassen sich g und h aus G_σ wählen.

6. Die rationalen Ordinalzahlen aus R bilden einen geordneten (kommutativen) Körper. Darüber hinaus gelten noch die folgenden Axiome:

Axiome der Limeselemente.

(1) *Alle natürlichen Limeszahlen sind rationale Ordinalzahlen.*

(2) *Sind λ_1, λ_2 natürliche Limeszahlen, so auch $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.*

(3) *Sind λ, μ natürliche Limeszahlen und ist $\lambda < \mu$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n: $\lambda + n < \mu$.*

Der Beweis verläuft wie früher im ganzzahligen Bereich.

Minimalaxiom.

Die Klasse der rationalen Ordinalzahlen ist Teilklasse einer jeden Klasse, die alle natürlichen Limeszahlen und 1 enthält, mit rationalen Ordinalzahlen α, β auch $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ und mit einer rationalen Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ auch $(-\alpha)$ und α^{-1}.

Dieses Axiom folgt unmittelbar aus Axiom (5) des PEANO-Systems für ganze Ordinalzahlen und aus Satz 14 dieses Paragraphen.

Archimedisches Axiom.
Zu rationalen Ordinalzahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gibt es eine natürliche Ordinalzahl n mit $\beta \cdot n > \alpha$.

Beweis. Es ist $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} > 0$. Ist aber eine rationale Ordinalzahl γ größer als 0, so gibt es positive ganze Ordinalzahlen g, h mit $\gamma = \frac{g}{h}$; dann ist $\gamma \leqq g$ (denn $h \cdot \gamma = g$ und $h \geqq 1$). Zu g gibt es aber schließlich eine natürliche Ordinalzahl n mit $g < n$; dann ist auch $\gamma < n$, also $\frac{\alpha}{\beta} < n$, also $\alpha < \beta \cdot n$.

Da sich jede natürliche Ordinalzahl m darstellen läßt als $m = \lambda + n$, wo λ eine natürliche Limeszahl und n eine natürliche Zahl ist, läßt sich das Archimedische Axiom auch so aussprechen: *Zu rationalen Ordinalzahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gibt es eine natürliche Limeszahl λ und eine natürliche Zahl n mit $\beta \cdot (\lambda + n) > \alpha$.*

Die rationalen Ordinalzahlen sind nun als transfiniter minimaler geordneter Körper bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert, was folgendes bedeutet:

Wir definieren zunächst: M, Λ, $+$, $\cdot$, $<$, 0, 1 bilden einen *transfiniten minimalen geordneten Körper* genau dann, wenn gilt: M, $+$, $\cdot$, $<$, 0,1 bilden einen geordneten (kommutativen) Körper (wobei M eine Klasse sei), Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi \in N}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern; es gelten noch die Axiome:

I. Axiome der Limeselemente.

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für jedes $\xi \in N$; $\Lambda_0 = 0$.
(2) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta$.
(3) Λ ist gegenüber $+$, $\cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften
$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi + \eta = \zeta$, $\quad \Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi \cdot \eta = \zeta$.
(4) Ist $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta$, so gilt für alle $n \in N_0$: $\Lambda_\xi + n \cdot 1 < \Lambda_\eta$, wobei $n \cdot 1$ die n-malige Addition von 1 bedeute.

II. Minimalaxiom.

Voraussetzung. M^* Klasse, $\Lambda_\xi \in M^*$ $(\xi \in N)$, $1 \in M^*$; $x, y \in M \cap M^* \rightarrow (x + y)$, $(x \cdot y) \in M^*$; $x \in M \cap M^* \wedge x \neq 0 \rightarrow (-x)$, $(x^{-1}) \in M^*$.
Behauptung. $M \subseteq M^*$.

Bilden M, Λ, $+$, $\cdot$, $<$, 0,1 einen transfiniten minimalen geordneten Körper, so existiert die kleinste Klasse G_M aller Klassen M^* mit den Eigenschaften: $\Lambda_\xi \in M^*$, $1 \in M^*$, $x, y \in M \cap M^* \rightarrow (x + y)$, $(-x) \in M^*$; denn solch eine Klasse M^* ist M und der Durchschnitt D aller solchen Klassen M^*; es ist dann $G_M = D \subseteq M$.

Satz 15. *Bilden M, Λ, $+$, $\cdot$, $<$, 0, 1 einen transfiniten minimalen geordneten Körper, so bilden G_M, Λ, $+$, $\cdot$, $<$, 0,1 ($+$, $\cdot$, $<$ seien hier die auf G_M eingeschränkten $+$, $\cdot$, $<$ von M) einen transfiniten minimalen geordneten Ring mit Einselement, und zu jedem $x \in M$ gibt es Elemente $g, h \in G_M$ mit $h \neq 0$ und $x = \frac{g}{h}$.*

Beweis. Für die erste Behauptung muß zunächst gezeigt werden, daß mit $x, y \in G_M$ auch $x \cdot y \in G_M$ gilt. Dies folgt induktiv: Es ist $\Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta \in G_M$, da Λ

abgeschlossen gegenüber „$\cdot$“ ist; es ist $\Lambda_\xi \cdot 1 = \Lambda_\xi \in G_M$; ist

$$\Lambda_\xi \cdot x \in G_M \wedge \Lambda_\xi \cdot y \in G_M,$$

so auch $\Lambda_\xi \cdot x + \Lambda_\xi \cdot y = \Lambda_\xi \cdot (x + y) \in G_M$; ist $\Lambda_\xi \cdot x \in G_M$, so auch

$$-\Lambda_\xi \cdot x = \Lambda_\xi \cdot (-x) \in G_M;$$

also ist für alle $x \in G_M$ und Λ_ξ stets $x \cdot \Lambda_\xi \in G_M$. Mit $x \in G_M$ ist auch $x \cdot 1 = x \in G_M$; ist $x \cdot y \in G_M \wedge x \cdot z \in G_M$, so auch $x \cdot y + x \cdot z = x(y + z) \in G_M$; ist $x \cdot y \in G_M$, so auch $-x \cdot y = x(-y) \in G_M$; also ist für alle $x, y \in G_M$ auch $x \cdot y \in G_M$. Es ist noch die Gültigkeit des Minimalaxioms nachzuweisen, also zu zeigen: *Voraussetzung.* M^* Klasse, $\Lambda_\xi \in M^*$, $1 \in M^*$; $x, y \in G_M \cap M^* \to (x + y), (-x) \in M^*$; *Behauptung.* $G_M \subseteq M^*$. Sei zum Beweis $M^{**} = G_M \cap M^*$; es ist zu zeigen $G_M \subseteq M^{**}$, also: $\Lambda_\xi \in M^{**}$, $1 \in M^{**}$; $x, y \in M \cap M^{**} \to (x + y)$, $(-x) \in M^{**}$. Dies folgt so: Die Fälle Λ_ξ und 1 sind trivial; wenn $x, y \in M \cap M^{**}$, so $x, y \in G_M \cap M^*$, also $(x + y), (-x) \in M^*$, also auch

$$(x + y), (-x) \in G_M \cap M^* = M^{**}.$$

Nun zur zweiten Behauptung über die Darstellbarkeit von x als $x = \frac{g}{h}$. Dies folgt wieder induktiv: $\Lambda_\xi = \frac{\Lambda_\xi}{1}, 1 = \frac{1}{1}$; wenn $x = \frac{g_1}{h_1}$, $y = \frac{g_2}{h_2}$, so $x + y = \frac{g_1 h_2 + g_2 h_1}{h_1 h_2}$ und $x \cdot y = \frac{g_1 \cdot g_2}{h_1 \cdot h_2}$; wenn $x \neq 0$, $x = \frac{g}{h}$, so ist $(-x) = -\frac{g}{h} = \frac{(-g)}{h}$ und $x^{-1} = \left(\frac{g}{h}\right)^{-1} = \frac{h}{g}$.

Satz 16 (Isomorphiesatz). *Bilden* $M_1, \Lambda_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\cdot}, <, 0, 1$ *und* $M_2, \Lambda_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\cdot}, <, 0, 1$ *transfinite minimale geordnete Körper, so sind diese Körper isomorph; d. h., es gibt eine eineindeutige Abbildung* φ *von* M_1 *auf* M_2 *mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \quad \text{für} \quad \xi \in N, \quad \varphi(\underset{1}{1}) = \underset{2}{1}, \quad x \underset{1}{<} y \to \varphi(x) \underset{2}{<} \varphi(y),$$

$$\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y), \quad \varphi(x \underset{1}{\cdot} y) = \varphi(x) \underset{2}{\cdot} \varphi(y).$$

Beweis. Nach dem Isomorphiesatz für transfinite Ringe (Satz 20 aus § 2) gibt es eine eineindeutige Abbildung ψ von G_{M_1} auf G_{M_2} mit $\psi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi}$, $\psi(\underset{1}{1}) = \underset{2}{1}, x \underset{1}{<} y \to \psi(x) \underset{2}{<} \psi(y), \psi(x \underset{1}{+} y) = \psi(x) \underset{2}{+} \psi(y), \psi(x \underset{1}{\cdot} y) = \psi(x) \underset{2}{\cdot} \psi(y)$. Zu jedem $x \in M_1$ gibt es nach Satz 15 Elemente $g, h \in G_{M_1}$ mit $h \neq 0$ und $x = \frac{g}{h}$. Dann definieren wir φ zu: $\varphi(x) = \frac{\psi(g)}{\psi(h)}$. Dies ist zunächst eine Funktion von M_1 in M_2; denn wenn $x = \frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}$, so ist ja $g_1 \underset{1}{\cdot} h_2 = g_2 \underset{1}{\cdot} h_1$, also $\psi(g_1) \underset{2}{\cdot} \psi(h_2) = \psi(g_2) \underset{2}{\cdot} \psi(h_1)$, also $\frac{\psi(g_1)}{\psi(h_1)} = \frac{\psi(g_2)}{\psi(h_2)}$. φ ist auch eine Funktion von M_1 auf M_2, da ψ eine

Funktion von G_{M_1} auf G_{M_2} ist. φ ist umkehrbar eindeutig; denn wenn $x = \frac{g_1}{h_1}$, $y = \frac{g_2}{h_2}$ und $\varphi(x) = \varphi(y)$, so ist doch $\psi(g_1) \cdot_2 \psi(h_2) = \psi(g_2) \cdot_2 \psi(h_1)$, also $g_1 \cdot_1 h_2 = g_2 \cdot_1 h_1$, also $x = y$. Es ist $\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \varphi\left(\frac{\Lambda_{1\xi}}{1}\right) = \frac{\psi(\Lambda_{1\xi})}{\psi(1)} = \frac{\Lambda_{2\xi}}{1} = \Lambda_{2\xi}$; $\varphi(1) = 1$. Ist $x = \frac{g_1}{h_1}$, $y = \frac{g_2}{h_2}$ und $x <_1 y$, so ist $g_1 \cdot_1 h_2 \lesseqgtr_1 g_2 \cdot_1 h_1$ (je nachdem, ob $h_1 \cdot_1 h_2 > 0$ oder < 0 ist), also $\psi(g_1) \cdot_2 \psi(h_2) \lesseqgtr_2 \psi(g_2) \cdot_2 \psi(h_1)$ (je nachdem, ob $\psi(h_1) \cdot_2 \psi(h_2) > 0$ oder < 0 ist), also $\varphi(x) <_2 \varphi(y)$. Ist $x = \frac{g_1}{h_1}$, $y = \frac{g_2}{h_2}$, so ist

$$\varphi(x +_1 y) = \varphi\left(\frac{g_1 \cdot_1 h_2 +_1 g_2 \cdot_1 h_1}{h_1 \cdot_1 h_2}\right) = \frac{\psi(g_1) \cdot_2 \psi(h_2) +_2 \psi(g_2) \cdot_2 \psi(h_1)}{\psi(h_1) \cdot_2 \psi(h_2)} = \varphi(x) +_2 \varphi(y);$$

ebenso ist $\varphi(x \cdot_1 y) = \varphi\left(\frac{g_1 \cdot_1 g_2}{h_1 \cdot_1 h_2}\right) = \frac{\psi(g_1) \cdot_2 \psi(g_2)}{\psi(h_1) \cdot_2 \psi(h_2)} = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)$.

Aus dem Minimalaxiom für transfinite Körper und Satz 16 folgt, daß es zwischen zwei transfiniten minimalen geordneten Körpern sogar genau eine isomorphe Abbildung gibt. Für die Durchführbarkeit des obigen Isomorphiebeweises genügt es wiederum, in der Definition der transfiniten Körper statt I (2) und I (3) zu fordern:

I (2*) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi S \eta$.

I (3*) Λ ist gegenüber $+, \cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften:

$$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow F_1(\xi, \eta) = \zeta, \qquad \Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow F_2(\xi, \eta) = \zeta.$$

Dabei ist S eine von vornherein unabhängig von den einzelnen Körpern vorgegebene binäre Relation in N, und F_1, F_2 sind ebensolche unabhängigen eindeutigen Abbildungen der Klasse aller Paare $[\xi, \eta]$ natürlicher Ordinalzahlen in N.

Auf Grund des Isomorphiesatzes gilt in jedem transfiniten minimalen geordneten Körper (mit den ursprünglichen spezialisierten S, F_1, F_2) das folgende (*transfinite*) *Archimedische Axiom*: *Zu Elementen* $\alpha, \beta \in M$ *mit* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *gibt es ein* Λ_ξ *und ein* $n \in N_0$ *mit* $\beta \cdot (\Lambda_\xi + n \cdot 1) > \alpha$, *wobei* $n \cdot 1$ *die n-malige Addition von* 1 *bedeute.*

Beschränkt man sich auf R_σ, so bilden auch die rationalen Ordinalzahlen aus R_σ einen geordneten (kommutativen) Körper, und es gelten analoge *Axiome der Limeselemente*, *Minimalaxiom* und *Archimedisches Axiom*, nur das jetzt alles auf R_σ relativiert ist; im Minimalaxiom kann man Mengen statt wie früher Klassen verwenden. Für R_0 fallen Minimalaxiom und Archimedisches Axiom mit den bekannten klassischen Axiomen der Minimalität und des Archimedes zusammen. Die R_σ mit $\sigma > 0$ sind Beispiele nicht im klassischen Sinne archimedisch geordneter Körper. Die rationalen Ordinalzahlen aus R_σ sind schließlich eindeutig bis auf Isomorphie festgelegt als transfiniter minimaler geordneter Körper vom Typ ω_σ, was folgendes bedeutet: Das 7-Tupel $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ heiße ein *transfiniter minimaler geordneter Körper vom Typ* ω_σ genau dann, wenn

gilt: $[M, +, \cdot, <, 0,1]$ ist ein geordneter (kommutativer) Körper, Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi<T}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern vom Typ T, wobei $T = 1$ für $\sigma = 0$ und $T = \omega_\sigma$ für $\sigma > 0$ (ω_σ reguläre Anfangszahl); es gelten noch die Axiome:

I. Axiome der Limeselemente.

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für $\xi < T$; $\Lambda_0 = 0$.

(2) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi < \eta$.

(3) Λ ist gegenüber $+, \cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften
$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi + \eta = \zeta$, $\quad \Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi \cdot \eta = \zeta$.

(4) Ist $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta$, so gilt für alle $n \in N_0$: $\Lambda_\xi + n \cdot 1 < \Lambda_\eta$, wobei $n \cdot 1$ die n-malige Addition von 1 bedeute.

II. Minimalaxiom.

Voraussetzung. M^* Menge, $\Lambda_\xi \in M^* (\xi < T), 1 \in M^*; x, y \in M \cap M^* \to (x + y)$, $(x \cdot y) \in M^*; x \in M \cap M^* \wedge x \neq 0 \to (-x), (x^{-1}) \in M^*$.

Behauptung. $M \subseteq M^*$.

Wie im absoluten Fall beweist man schließlich die folgenden Sätze:

Satz 17. *Ist* $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0,1]$ *ein transfiniter minimaler geordneter Körper vom Typ* ω_σ *und ist* G_M *die kleinste Menge aller Mengen* M^* *mit den Eigenschaften* $\Lambda_\xi \in M^*$, $1 \in M^*$; $x, y \in M \cap M^* \to (x + y)$, $(-x) \in M^*$, *dann ist* $[G_M, \Lambda, +, \cdot, <, 0,1]$ *ein transfiniter minimaler geordneter Ring mit Einselement vom Typ* ω_σ, *und zu jedem* $x \in M$ *gibt es Elemente* $g, h \in G_M$ *mit* $h \neq 0$ *und* $x = \frac{g}{h}$.

Satz 18 (Isomorphiesatz). *Sind* $[M_1, \Lambda_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\cdot}, \underset{1}{<}, 0,1]$ *und* $[M_2, \Lambda_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\cdot}, \underset{2}{<}, 0,1]$ *transfinite minimale geordnete Körper vom Typ* ω_σ, *so sind diese Körper isomorph*; *d. h., es gibt ein eineindeutige Abbildung* φ *von* M_1 *auf* M_2 *mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \quad \text{für} \quad \xi < T, \quad \varphi(\underset{1}{1}) = \underset{2}{1}, \quad x \underset{1}{<} y \to \varphi(x) \underset{2}{<} \varphi(y),$$

$$\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y), \quad \varphi(x \underset{1}{\cdot} y) = \varphi(x) \underset{2}{\cdot} \varphi(y).$$

Es gelten analoge Bemerkungen wie im Anschluß an den absoluten Isomorphiesatz (Satz 16).

Es sei am Schluß noch gesagt, daß unsere rationalen Ordinalzahlen völlig verschieden sind von den bei Bachmann[1]) aufgeführten rationalen Ordinalzahlen, für die im Gegensatz zu unseren Zahlen keine zweckmäßigen arithmetischen Gesetze gelten.

§ 4 Reelle Ordinalzahlen

1. Wir machen zunächst einige Dichteaussagen im Bereich der rationalen Ordinalzahlen. N ist eine Unmenge, wegen $N \subseteq G \subseteq R$ sind damit auch G und R

[1]) H. Bachmann, Transfinite Zahlen, Springer-Verlag, Berlin 1955, S. 79.

Unmengen. Bezeichnet man mit $\|\omega_\sigma\|$ die Kardinalzahl von ω_σ, so gilt sofort: $\overline{\overline{N}}_\sigma = \overline{\overline{G}}_\sigma = \overline{\overline{R}}_\sigma = \|\omega_\sigma\|$. Für rationale Ordinalzahlen $r, s \in R$ mit $r < s$ ist die Klasse aller $x \in R$ mit $r \leqq x \leqq s$ eine Unmenge; denn es ist für $n \in N$ stets $r \leqq x_n \leqq s$ mit $x_n = r + \dfrac{s-r}{n+1} \in R$. Für $r, s \in R_\sigma$ mit $r < s$ hat die Menge aller $x \in R_\sigma$ mit $r \leq x \leqq s$ die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$, da wieder $r \leqq x_n \leqq s$ für $n \in N_\sigma$ und $x_n = r + \dfrac{s-r}{n+1} \in R_\sigma$. Trotzdem sind die rationalen Ordinalzahlen noch lückenhaft; denn es gilt der

Satz 1. *Ist die natürliche Ordinalzahl* $p = \omega^\alpha a > 1$ ($\alpha \in N$, $a \in N_0$) *eine Primzahl und* $n \in N_0$, $n > 1$, *so gibt es keine rationale Ordinalzahl* r *mit* $\sqrt[n]{p} = r$ (*d. h. mit* $r^n = p$).

Beweis. Es müßte $r \neq 0$ sein. Es sei also für eine rationale Ordinalzahl $r \neq 0$: $r^n = p$, wobei etwa $r = \dfrac{g}{h}$ ist mit $g, h \in G$ und $g \neq 0$, $h \neq 0$. Nach Satz 13 aus § 2 dürfen wir voraussetzen, daß g und h nicht den gemeinsamen Teiler p besitzen. Mit $r^n = p$ wäre auch $g^n = ph^n$, also wäre g durch p teilbar nach Satz 16 aus § 2, also wäre g^n durch p^n teilbar, also ph^n durch p^n teilbar. Wegen $n > 1$ wäre dann h^n durch p teilbar, also h durch p teilbar im Widerspruch zur Voraussetzung, daß g und h nicht den gemeinsamen Teiler p besitzen.

Wie im klassischen Fall bemühen wir uns, die Lücken der transfiniten rationalen Zahlengeraden durch Konstruktion reeller Ordinalzahlen auszufüllen. Denkt man dabei etwa an die Einführung der reellen Ordinalzahlen als Schnitte, so ist die Verwendung von Schnitten in R unzweckmäßig, da Ober- und Unterklasse solcher Schnitte bereits Unmengen wären, diese Schnitte als geordnetes Paar aus Unter- und Oberklasse demnach gar nicht existieren würden. Analog liegen die Verhältnisse bei der Einführung über transfinite Fundamentalfolgen bzw. transfinite Intervallschachtelungen. Verwendet man nunmehr Schnitte (analog bei den anderen Einführungsarten) in R_σ, so gelingt aber wieder kein Vergleich dieser Schnitte, falls man alle R_σ zur Konkurrenz zuläßt, da nämlich bei $\sigma < \tau$ die Struktur der Schnitte in R_σ gröber ist als die der Schnitte in R_τ. Es bleibt also nur übrig, stufenweise reelle Ordinalzahlen in bezug auf jedes feste R_σ einzuführen; die reellen Ordinalzahlen in bezug auf R_0 werden dann die bisher üblichen endlichen klassischen reellen Zahlen sein.

2. Das geordnete Paar $[A, B]$ heiße ein Dedekindscher *Schnitt in* R_σ genau dann, wenn gilt

$$A \subseteq R_\sigma, \quad B \subseteq R_\sigma, \quad A \cup B = R_\sigma, \quad A \cap B = \varnothing,$$

$$a \in A \wedge b \in B \to a < b,$$

$$\sim \exists\, s\,(s \in A \wedge \forall\, x(x \in A \to x \leqq s)).$$

A heißt *Unterklasse*, B *Oberklasse* des Schnittes $[A, B]$. Für einen Schnitt $[A, B]$ gilt bei $x \in R_\sigma$:

$$a \in A \wedge x \leqq a \to x \in A, \qquad b \in B \wedge x \geqq b \to x \in B.$$

α heißt eine *reelle Ordinalzahl bezüglich* R_σ, falls $\exists\, A\, \exists\, B$ ($[A, B]$ DEDEKINDscher Schnitt in $R_\sigma \wedge \alpha = [A, B]$); für $\alpha = [A, B]$ sagt man auch, $[A, B]$ *repräsentiere* α. D_σ sei die Menge aller reellen Ordinalzahlen bezüglich R_σ. C_σ sei die Menge aller $\alpha \in D_\sigma$, für die die HÖLDERsche *Bedingung* erfüllt ist; d. h. wenn $\alpha = [A, B]$, so gibt es zu jedem $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$ zwei rationale Ordinalzahlen $a \in A$ und $b \in B$ mit $b - a = \delta$. Wenn also $\alpha \in C_\sigma$ und $\alpha = [A, B]$, so ist $A \neq \varnothing$ und $B \neq \varnothing$; außerdem gibt es zu jedem $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$ zwei rationale Ordinalzahlen $a \in A$ und $b \in B$ mit $b - a = \delta$, wobei b nicht das kleinste Element von B ist. Ist nämlich $b - a = \delta$ und b das kleinste Element von B, so ist auch $\left(b + \frac{\delta}{2}\right) - \left(a + \frac{\delta}{2}\right) = \delta$ mit $b + \frac{\delta}{2} \in B$ und $a + \frac{\delta}{2} \in A \left(\text{denn } a + \frac{\delta}{2} < a + \delta = b\right)$. Hat man ein Paar $[A, B]$ mit: $A \subseteq R_\sigma$, $B \subseteq R_\sigma$, $A \cup B = R_\sigma$, $A \cap B = \varnothing$, $a \in A \wedge b \in B \to a < b$ und gilt keine HÖLDERsche Bedingung, so kann A kein größtes Element a_0 und b ebenso kein kleinstes Element b_0 haben, da sonst für $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$ gilt

$$a = a_0 \in A \wedge b = a_0 + \delta \in B \quad \text{bzw.} \quad a = b_0 - \delta \in A \wedge b = b_0 \in B,$$

also $a \in A, b \in B, b - a = \delta$. Unser Paar $[A, B]$ ist also automatisch ein DEDEKINDscher Schnitt $\alpha \in D_\sigma$.

Es ist $\varnothing \subset C_\sigma \subset D_\sigma$; denn z. B. liegen die DEDEKINDschen Schnitte

$$[R_\sigma, \varnothing] = +\infty_\sigma \quad \text{und} \quad [\varnothing, R_\sigma] = -\infty_\sigma$$

nicht in C_σ, aber in D_σ. Der Schnitt $[A, B] \in D_\sigma$ ($\sigma > 0$) mit

$$x \in A \leftrightarrow x \in R_\sigma \wedge \exists\, n\, (n \in N_0 \wedge x \leqq n)$$

liegt ebenfalls nicht in C_σ; denn für jedes $a \in A$ und $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$ mit etwa $\delta \leqq 1$ ist ja $a + \delta \leqq a + 1 \in A$ und nicht aus B. Ebenso liegt nicht in C_σ der Schnitt $[A, B] \in D_\sigma$ ($\sigma > 0$) mit

$$x \in B \leftrightarrow x \in R_\sigma \wedge \exists\, n \left(n \in N_0 \wedge \frac{1}{n+1} \leqq x\right);$$

denn für jedes $b \in B$ und $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$ mit etwa $\delta < \frac{1}{\omega_0}$ ist ja — es sei etwa $\frac{1}{n_0} \leqq b - \frac{1}{n_0 + 1} < \frac{1}{n_0} - \frac{1}{\omega_0}$ und damit auch $\frac{1}{n_0 + 1} < b - \delta$, also $b - \delta \in B$ und nicht aus A.

Es ist C_0 die Menge der üblichen reellen Zahlen; $D_0 = C_0 \cup \{+\infty_0\} \cup \{-\infty_0\}$. Man definiere noch $U_\sigma = D_\sigma \setminus C_\sigma$ und nenne die Elemente aus U_σ *uneigentliche reelle Ordinalzahlen*, die Elemente von C_σ *eigentliche reelle Ordinalzahlen*.

Wir wenden uns nun den äquivalenten Definitionen der reellen Ordinalzahlen aus C_σ über transfinite CAUCHYsche Fundamentalfolgen und transfinite Intervallschachtelungen zu.

Eine Folge (r_n) vom Typ ω_σ rationaler Ordinalzahlen $r_n \in R_\sigma$ heiße *Fundamentalfolge in* R_σ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt, so daß $|r_n - r_{n^*}| < \varepsilon$ gilt für alle $n, n^* \in N_\sigma$ mit $n, n^* \geqq N$.

Satz 2. *Jede Fundamentalfolge* (r_n) *in* R_σ *ist beschränkt; d. h., es gibt ein* $K \in R_\sigma$ *mit* $|r_n| < K$ *für alle* $n \in N_\sigma$.

Beweis. Es gibt ein N, so daß für $n, n^* \geqq N$ gilt: $|r_n - r_{n^*}| < 1$; dann gilt für alle $n \geqq N$: $|r_n| = |(r_n - r_N) + r_N| \leqq |r_n - r_N| + |r_N| < 1 + |r_N|$. Nach dem folgenden Lemma existiert aber ein $K \in R_\sigma$ mit: $|r_0|, |r_1|, \ldots, |r_N| + 1 < K$.

Lemma. *Ist* $M \subseteq R_\sigma$ *und* $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$, *so ist* M *beschränkt, d. h., es gibt ein* $K \in R_\sigma$ *mit* $r \in M \to |r| < K$.

Beweis. $M \subseteq R_\sigma$ ist beschränkt genau dann, wenn es ein $K \in N_\sigma$ gibt mit: $r \in M \to |r| < K$; denn nach dem Archimedischen Axiom für rationale Ordinalzahlen gibt es zu jedem $K' \in R_\sigma$ ein $K \in N_\sigma$ mit $K' \leqq K$. Es genügt also zu zeigen: $M \subseteq R_\sigma \wedge \bigvee n\,(n \in N_\sigma \to \exists\, r\,(r \in M \wedge |r| \geqq n)) \to \overline{\overline{M}} = \|\omega_\sigma\|$. Es sei A_n der durch $n \in N_\sigma$ bestimmte Abschnitt von N_σ. Dann definieren wir mit transfiniter Induktion über N_σ die Folge $F(n)$ natürlicher Ordinalzahlen aus N_σ zu: Ist für $x \in A_n$ schon $F(x)$ erklärt, so sei

$$F(n) = \mu_m \{m \in N_\sigma \wedge \exists\, r\,(r \in M \wedge |r| \leqq m \wedge \bigvee x\,(x \in A_n \to F(x) < |r|))\},$$

wobei das Symbol „μ_m" bedeutet: „das kleinste m". (Nach der vorausgesetzten Unbeschränktheit von M und wegen der Abgeschlossenheit von N_σ gegenüber Limesbildung gibt es ja ein $r \in M$ mit $F(x) < |r|$ für jedes $x \in A_n$.) Aus der Rekursionsgleichung für $F(n)$ ergibt sich unmittelbar: (1) Für jedes $n \in N_\sigma$ gibt es ein $r \in M$ mit: $|r| \leqq F(n) \wedge \bigvee x\,(x \in A_n \to F(x) < |r|)$. (2) $F(n)$ ist echt monoton: $n_1 < n_2 \to F(n_1) < F(n_2)$. Wir definieren nun für jedes $n \in N_\sigma$ die Menge $M(n)$ als Menge aller $r \in M$ mit: $|r| \leqq F(n) \wedge \bigvee x\,(x \in A_n \to F(x) < |r|)$. Es folgt dann sofort: $M(n) \neq \varnothing$ und $n_1 \neq n_2 \to M(n_1) \cap M(n_2) = \varnothing$; also gibt es eine Auswahlmenge A aus dem System $\{M(n)\}_{n \in N_\sigma}$, für die dann sicher $\overline{\overline{A}} = \|\omega_\sigma\|$ gilt. Wegen $A \subseteq M$ ist also $\|\omega_\sigma\| \leqq \overline{\overline{M}}$, also wegen $M \subseteq R_\sigma$ schließlich: $\overline{\overline{M}} = \|\omega_\sigma\|$.

Fundamentalfolgen (r_n) und (s_n) in R_σ heißen *grenzwertgleich* — $(r_n) \overline{\overline{\sim}}_G (s_n)$[1] — genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit: $n \in N_\sigma$, $n \geqq N \to |r_n - s_n| < \varepsilon$. Die Grenzwertgleichheit ist eine Äquivalenzrelation: Wegen $|r_n - r_n| = 0$ ist $(r_n) \overline{\overline{\sim}}_G (r_n)$; wegen $|r_n - s_n| = |s_n - r_n|$ ist $(r_n) \overline{\overline{\sim}}_G (s_n) \to$ $\to (s_n) \overline{\overline{\sim}}_G (r_n)$; ist $(r_n) \overline{\overline{\sim}}_G (s_n) \wedge (s_n) \overline{\overline{\sim}}_G (t_n)$ mit $|r_n - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqq N_1$ und $|s_n - t_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqq N_2$, so ist

$$|r_n - t_n| = |(r_n - s_n) + (s_n - t_n)| \leqq |r_n - s_n| + |s_n - t_n| < \varepsilon$$

für $n \geqq N = N_1 + N_2$. Wir können also Abstraktionsklassen bilden. Ist (r_n) eine Fundamentalfolge in R_σ, so sei $C_\sigma^*(r_n)$ die Menge aller Fundamentalfolgen (s_n) in R_σ mit $(s_n) \overline{\overline{\sim}}_G (r_n)$. Es ist sofort $C_\sigma^*(r_n) \neq \varnothing$. α heiße eine *reelle Ordinalzahl* bezüglich* R_σ, falls es eine Fundamentalfolge (r_n) in R_σ gibt mit $\alpha = C_\sigma^*(r_n)$; man

[1] Strenggenommen müßte man „$\overline{\overline{\sim}}_{G_\sigma}$" statt „$\overline{\overline{\sim}}_G$" schreiben. Da jedoch keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wählen wir — auch bei weiteren Symbolen im folgenden — die kürzere Schreibweise ohne σ.

sagt dann auch, (r_n) *repräsentiere* α. $C_\sigma{}^*$ sei schließlich die Menge aller reellen Ordinalzahlen* bezüglich R_σ.

Satz 3. *Es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung* $\varphi_\sigma{}^*$ *von* C_σ *auf* $C_\sigma{}^*$, *so daß gilt*: $\varphi_\sigma{}^*(\alpha) = \alpha^* \leftrightarrow$ *Wenn* $\alpha = [A, B]$, $\alpha^* = C_\sigma{}^*(r_n)$, $a \in A$, $b \in B$, *wobei* b *nicht das kleinste Element von* B *ist, so gibt es ein* $N \in N_\sigma$ *mit* $a < r_n < b$ *für alle* $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$.

Beweis. a) Zu jedem $\alpha \in C_\sigma$ gibt es höchstens ein $\alpha^* \in C_\sigma{}^*$, so daß die obige rechte Seite gilt. Wäre nämlich $\alpha = [A, B]$ und wären $\alpha^* = C_\sigma{}^*(r_n)$, $\beta^* = C_\sigma{}^*(s_n)$ zwei solche Elemente aus $C_\sigma{}^*$, so gäbe es wegen der Hölder-Bedingung zu jedem $\delta(m) = \dfrac{1}{m+1}$ $(m \in N_\sigma)$ Elemente $a(m) \in A$, $b(m) \in B$ ($b(m)$ nicht kleinstes Element von B) mit $b(m) - a(m) = \dfrac{1}{m+1}$ und $a(m) < r_n, s_n < b(m)$ für $n \geqq N(m)$, also $|r_n - s_n| < b(m) - a(m) = \dfrac{1}{m+1}$ für $n \geqq N(m)$. Bestimmt man schließlich für $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ das kleinste $m(\varepsilon)$ mit $\dfrac{1}{m(\varepsilon)+1} \leqq \varepsilon$ (gibt es nach dem Archimedischen Axiom für rationale Ordinalzahlen), so hat man $|r_n - s_n| < \varepsilon$ für $n \geqq N(m(\varepsilon))$, also $(r_n) \overset{=}{G} (s_n)$, also $\alpha^* = \beta^*$.

b) Zu jedem $\alpha^* \in C_\sigma{}^*$ gibt es höchstens ein $\alpha \in C_\sigma$, so daß die obige rechte Seite gilt. Wäre nämlich $\alpha^* = C_\sigma{}^*(r_n)$ und wären $\alpha = [A, B]$, $\beta = [C, D]$ zwei solche Elemente aus C_σ, so wäre wegen $\alpha \neq \beta : A \subset C \vee C \subset A$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A \subset C$; es gibt also ein $c \in C$ mit $c \in B$. Da C kein größtes Element besitzt, kann man c so wählen, daß es nicht das kleinste Element von B ist. Dann gäbe es schließlich einen Index $N_1 \in N_\sigma$ mit $r_n < c$ für $n \geqq N_1$ und einen Index $N_2 \in N_\sigma$ mit $c < r_n$ für $n \geqq N_2$, also $c < r_n < c$ für $n \geqq N = N_1 + N_2$; Widerspruch.

c) Zu jedem $\alpha \in C_\sigma$ gibt es ein $\alpha^* \in C_\sigma{}^*$, so daß die obige rechte Seite gilt. Es sei $\alpha = [A, B]$, $\dfrac{1}{n+1} = \delta(n) = b(n) - a(n)$ $(n \in N_\sigma)$ mit $a(n) \in A$, $b(n) \in B$. Für jedes $a \in A$ und $b \in B$ gibt es dann ein $N \in N_\sigma$ mit: $n \geqq N \to a < a(n) < b$; denn sonst gäbe es beliebig hohe Indizes $n \in N_\sigma$ mit $a(n) \leqq a \vee b \leqq a(n)$. Wegen $a(n) \in A$ kann aber nie $b \leqq a(n)$ sein; wegen $a \in A$ und der Tatsache, daß A kein größtes Element hat, gibt es ein $a' \in A$ mit $a < a'$; dann gilt also für beliebig hohe n: $a(n) \leqq a < a'$. Wählen wir ein hinreichend hohes n_0 mit $\delta(n_0) < a' - a$, so wäre $a(n_0) + \delta(n_0) = b(n_0) < a'$, also $b(n_0) \in A$ im Widerspruch zu $b(n) \in B$. Die Folge (r_n) mit $r_n = a(n)$ hat also die im Satz verlangte Eigenschaft; (r_n) ist auch eine Fundamentalfolge in R_σ: Wenn $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$, dann gibt es Elemente $a \in A$, $b \in B$ mit $b - a = \varepsilon$ und ein $N \in N_\sigma$ mit $a < r_n < b$ für $n \geqq N$, also

$$|r_n - r_{n^*}| < \varepsilon$$

für n, $n^* \geqq N$. Ist nun schließlich (s_n) irgendein Repräsentant von $\alpha^* = C_\sigma{}^*(r_n)$, also $|r_n - s_n| < \varepsilon$ für $n \geqq N_1$, und sind $a \in A$, $b \in B$, wobei b nicht das kleinste Element von B ist, dann gibt es ein $a' \in A$ und ein $b' \in B$ mit $a < a'$ und $b' < b$, $a' - a = b - b' = d$. Für $n \geqq N_2$ sei $a' < r_n < b'$, für $n \geqq N_1(d)$ ist außerdem

$|r_n - s_n| < d$; also ist für $n \geqq N = N_1(d) + N_2$: $a' < r_n < b' \wedge |r_n - s_n| < d$, also $a < s_n < b$.

d) Zu jedem $\alpha^* \in C_\sigma^*$ gibt es ein $\alpha \in C_\sigma$, so daß die obige rechte Seite gilt. Es sei $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$. Für jedes $N \in N_\sigma$ bilde man die Menge $A(N) \subseteq R_\sigma$ mit

$$x \in A(N) \leftrightarrow x \in R_\sigma \wedge \bigvee n (n \in N_\sigma \wedge n \geqq N \rightarrow x < r_n).$$

Dann bilde man die beiden Mengen

$$A = \begin{cases} \bigcup\limits_{N \in N_\sigma} A(N), \text{ falls } \bigcup\limits_{N \in N_\sigma} A(N) \text{ kein größtes Element besitzt,} \\ \left(\bigcup\limits_{N \in N_\sigma} A(N)\right) \setminus \{g\}, \text{ falls } \bigcup\limits_{N \in N_\sigma} A(N) \text{ ein größtes Element } g \text{ besitzt,} \end{cases}$$

$B = R_\sigma \setminus A$.

Es ist dann $\alpha = [A, B) \in D_\sigma$. α erfüllt aber auch die Hölder-Bedingung: Für $\delta > 0$, $\delta \in R_\sigma$ gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $|r_N - r_n| < \frac{\delta}{2}$ für $n \geqq N$, also

$$r_N - \frac{\delta}{2} < r_n < r_N + \frac{\delta}{2}$$

für $n \geqq N$; dann ist aber sicherlich $a = r_N - \frac{\delta}{2} \in A(N) \subseteq A$ und $b = r_N + \frac{\delta}{2} \in B$; also $a \in A$, $b \in B$ und $b - a = \delta$. Also ist $\alpha \in C_\sigma$. Es sei jetzt $a \in A$ und $b \in B$, wobei b nicht das kleinste Element von B ist, und $\delta(m) = \frac{1}{m+1}$ $(m \in N_\sigma)$. Dann gibt es also Zahlen $a(m) \in A$ und $b(m) \in B$ und Indizes $N(m)$ mit $b(m) - a(m) = \delta(m)$ und $a(m) < r_n < b(m)$ für $n \geqq N(m)$. Es gibt dann aber ein $M \in N_\sigma$ mit $a < a(M)$ und $b(M) < b$. Wäre nämlich stets $a(m) \leqq a \vee b \leqq b(m)$, so wählen wir Elemente $a' \in A, b' \in B$ mit $a < a', b' < b, a' - a = b - b' = d$ und ein m_0 so, daß $\delta(m_0) < d$ gilt. Dann wäre auch

$$b(m_0) = a(m_0) + \delta(m_0) < a + d = a' \vee b' = b - d < b(m_0) - \delta(m_0) = a(m_0);$$

es wäre also $b(m_0) \in A \vee a(m_0) \in B$; Widerspruch. Für unser M ist schließlich $a < r_n < b$ bei $n \geqq N(M)$. Ist (s_n) ein beliebiger Repräsentant von $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$, so zeigt man wie unter c) (man kann ja in c) noch verlangen, daß b' nicht das kleinste Element von B ist), daß es dann auch für $a \in A$, $b \in B$, wobei b nicht das kleinste Element von B ist, ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $a < s_n < b$ für $n \geqq N$.

Auf Grund dieses Satzes können wir später, falls es uns vorteilhafter erscheint, die Rechenoperationen für reelle Ordinalzahlen $\alpha \in C_\sigma$ innerhalb C_σ^* erklären, indem wir sie in C_σ^* einführen und vermittels φ_σ^* auf C_σ übertragen.

Das geordnete Paar $[r_n, s_n]$ von Folgen (r_n), (s_n) vom Typ ω_σ rationaler Ordinalzahlen $r_n, s_n \in R_\sigma$ heiße *Intervallschachtelung in* R_σ genau dann, wenn gilt:

(1) $n_1, n_2 \in N_\sigma \wedge n_1 < n_2 \rightarrow r_{n_1} \leqq r_{n_2} \wedge s_{n_2} \leqq s_{n_1}$,

(2) $n \in N_\sigma \rightarrow r_n \leqq s_n$,

(3) Zu jedem $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in N_\sigma$, so daß $|r_n - s_n| < \varepsilon$ gilt für alle $n \in N_\sigma$ mit $n \geqq N$.

Die beiden Randfolgen (r_n), (s_n) einer Intervallschachtelung $[r_n, s_n]$ in R_σ sind sofort Fundamentalfolgen in R_σ.

Intervallschachtelungen $[r_n, s_n]$ und $[u_n, v_n]$ in R_σ heißen *intervallschachtelungsgleich* — $[r_n, s_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [u_n, v_n]$ — genau dann, wenn für jedes $n \in N_\sigma$ gilt

$$r_n \leqq v_n \wedge u_n \leqq s_n .$$

Die Intervallschachtelungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation: Wegen $r_n \leqq s_n \wedge r_n \leqq s_n$ ist $[r_n, s_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [r_n, s_n]$; wegen

$$r_n \leqq v_n \wedge u_n \leqq s_n \to u_n \leqq s_n \wedge r_n \leqq v_n$$

ist $[r_n, s_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [u_n, v_n] \to [u_n, v_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [r_n, s_n]$; nun zur Bedingung

$$[r_n, s_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [u_n, v_n] \wedge [u_n, v_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [x_n, y_n] \to [r_n, s_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [x_n, y_n]:$$

Wenn $r_n \leqq v_n \wedge u_n \leqq s_n \wedge u_n \leqq y_n \wedge x_n \leqq v_n$, so ist auch $r_n \leqq y_n \wedge x_n \leqq s_n$; wäre nämlich für ein $M \in N_\sigma$: $y_M < r_M \vee s_M < x_M$, so sei

$$d = \begin{cases} r_M - y_M, & \text{falls } x_M \leqq s_M ; \\ x_M - s_M, & \text{falls } r_M \leqq y_M ; \\ \mathrm{Min}\,\{(r_M - y_M), (x_M - s_M)\}, & \text{falls } y_M < r_M \wedge s_M < x_M . \end{cases}$$

Weiterhin sei $N^* \in N_\sigma$ so bestimmt, daß $|u_n - v_n|, |x_n - y_n| < \frac{d}{2}$ ist für $n \geqq N^*$. Für $N = M + N^*$ haben wir dann:

$$y_N < r_N \vee s_N < x_N ;\ r_N - y_N \geqq d \vee x_N - s_N \geqq d ;\ |u_N - v_N|,\ |x_N - y_N| < \frac{d}{2} ;$$

daraus folgt schließlich: $r_N - \frac{d}{2} < u_N, u_N - \frac{d}{2} < x_N$, also $r_N - d < u_N - \frac{d}{2} <$ $< x_N \leqq y_N$, also $r_N - y_N < d$; ebenso $s_N + \frac{d}{2} > v_N$, $v_N + \frac{d}{2} > y_N$, also $s_N + d >$ $> v_N + \frac{d}{2} > y_N \geqq x_N$, also $x_N - s_N < d$; $r_N - y_N < d$ und $x_N - s_N < d$ ergeben aber einen Widerspruch zur Konstruktion von d.

Wir können also Abstraktionsklassen bilden. Ist $[r_n, s_n]$ eine Intervallschachtelung in R_σ, so sei $C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$ die Menge aller Intervallschachtelungen $[u_n, v_n]$ in R_σ mit $[u_n, v_n] \overline{=}_{\mathrm{I}} [r_n, s_n]$. Es ist sofort $C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n) \neq \emptyset$. α heiße eine *reelle Ordinalzahl** bezüglich* R_σ, falls es eine Intervallschachtelung $[r_n, s_n]$ in R_σ gibt mit $\alpha = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$; man sagt dann auch, $[r_n, s_n]$ *repräsentiere* α. $C_\sigma{}^{**}$ sei schließlich die Menge aller reellen Ordinalzahlen** bezüglich R_σ.

Satz 4. *Es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung* $\varphi_\sigma{}^{**}$ *von* C_σ *auf* $C_\sigma{}^{**}$, *so daß gilt*: $\varphi_\sigma{}^{**}(\alpha) = \alpha^{**} \leftrightarrow$ *Wenn* $\alpha = [A, B]$, $\alpha^{**} = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$, $a \in A, b \in B$, *so gilt* $r_n \leqq b \wedge a \leqq s_n$ *für jedes* $n \in N_\sigma$.

Beweis. Die angegebene Bedingung $r_n \leqq b \wedge a \leqq s_n$ ist zunächst (da A kein größtes Element enthält) gleichwertig mit den Bedingungen: (1) $r_n \leqq b \wedge a < s_n$, (2) $r_n \leqq b \wedge s_n \in B$.

a) Zu jedem $\alpha \in C_\sigma$ gibt es höchstens ein $\alpha^{**} \in C_\sigma{}^{**}$, so daß die obige rechte Seite gilt. Wäre nämlich $\alpha = [A, B]$ und wären $\alpha^{**} = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$, $\beta^{**} = C_\sigma{}^{**}(u_n, v_n)$ zwei solche Elemente aus $C_\sigma{}^{**}$, so wäre also für beliebiges $b \in B$: $r_n, u_n \leqq b$ und $s_n, v_n \in B$; dann ist aber sofort $r_n \leqq v_n \wedge u_n \leqq s_n$, also $[r_n, s_n] \overline{\overline{\subset}}_{\mathrm{I}} [u_n, v_n]$, also $\alpha^{**} = \beta^{**}$.

b) Zu jedem $\alpha^{**} \in C_\sigma{}^{**}$ gibt es höchstens ein $\alpha \in C_\sigma$, so daß die obige rechte Seite gilt. Wäre nämlich $\alpha^{**} = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$ und wären $\alpha = [A, B]$, $\beta = [C, D]$ zwei solche Elemente aus C_σ, so wäre wegen $\alpha \neq \beta : A \subset C \vee C \subset A$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A \subset C$; es gibt also ein $c \in C$ mit $c \in B$. Dann müßte gelten: $r_n \leqq c$, $s_n \in B$, $s_n \in D$. Zu $c \in C$ gibt es ein $c' \in C$ mit $c < c'$. Für $n \geqq N$ sei $|r_n - s_n| < (c' - c)$; dann ist also $s_N < c'$, also $s_N \in C$ im Widerspruch zu $s_N \in D$.

c) Zu jedem $\alpha \in C_\sigma$ gibt es ein $\alpha^{**} \in C_\sigma{}^{**}$, so daß die obige rechte Seite gilt. Es sei $\alpha = [A, B]$, $\dfrac{1}{n+1} = \delta(n) = b(n) - a(n)$ mit $a(n) \in A$, $b(n) \in B$ $(n \in N_\sigma)$, wobei $b(n)$ nicht kleinstes Element von B ist. Für jedes $a \in A$, $b \in B$ (b nicht kleinstes Element von B) gibt es dann ein $N \in N_\sigma$ mit $a < a(n) < b(n) < b$ für $n \geqq N$; denn sonst gäbe es beliebig hohe Indizes $n \in N_\sigma$ mit $a(n) \leqq a \vee b \leqq b(n)$. In diesem Falle gibt es aber Elemente $a' \in A$, $b' \in B$ mit $a < a'$, $b' < b$, $a' - a = b - b' = d$, so daß für beliebig hohe Indizes n gilt: $a(n) \leqq a < a' \vee b' < b \leqq b(n)$. Wählen wir ein hinreichend hohes n_0 mit $\delta(n_0) < d$, so wäre

$$a(n_0) + \delta(n_0) = b(n_0) < a' \vee b' < a(n_0) = b(n_0) - \delta(n_0),$$

also $b(n_0) \in A \vee a(n_0) \in B$; Widerspruch. Wir zeigen jetzt, daß es zu jedem $n \in N_\sigma$ ein $N \in N_\sigma$ gibt, so daß für alle $x \in N_\sigma$ mit $x \leqq n$ gilt: $a(x) < a(N) < b(N) < b(x)$. Nach den eben durchgeführten Betrachtungen gibt es für jedes $x \leqq n$ ein $N(x)$ mit: $m \geqq N(x) \to a(x) < a(m) < b(m) < b(x)$. Man erhält dann das gewünschte N als $N = \lim\limits_{x \leqq n} N(x)$; es ist dann $N \geqq N(x)$ für $x \leqq n$ und $N \in N_\sigma$ wegen der Abgeschlossenheit von N_σ gegen Limesbildung. Es gilt dann auch sofort: Für jedes $n \in N_\sigma$ gibt es ein $N \in N_\sigma$, so daß für alle x, $y \in N_\sigma$ gilt

$$x \leqq n \wedge y \geqq N \to a(x) < a(y) < b(y) < b(x).$$

Wir sind also zu folgender transfinit-induktiver Definition einer Funktion F von N in N_σ berechtigt: Ist F für alle $x \in A_n$ (A_n ist der Abschnitt von N_σ bezüglich $n \in N_\sigma$) erklärt, so sei — „μ_m“ bedeute: „das kleinste m“ —

$$F(n) = \mu_m \big\{ m \in N_\sigma \wedge \forall\, x \big(x \in A_n \to F(x) < m \wedge a(F(x)) < a(m) < b(m) < b(F(x)) \big) \big\}.$$

Man bilde die Folgen (r_n), (s_n) mit $r_n = a(F(n))$, $s_n = b(F(n))$; dann ist $\alpha^{**} = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$ eine Intervallschachtelung in R_σ; denn nach Konstruktion von $\delta(n)$ ist $a(n) < b(n)$, also auch $r_n < s_n$; ist außerdem $n_1 < n_2$, so ist nach Konstruktion von F: $r_{n_1} < r_{n_2} < s_{n_2} < s_{n_1}$; schließlich folgt aus der Konstruktion von F, daß F echt monoton ist, daß also die Mächtigkeit der Menge der Funktions-

werte von F gleich $\overline{\overline{N}}_\sigma$ ist; also gibt es zu jedem $N \in N_\sigma$ ein $n \in N_\sigma$ mit $N \leqq F(n)$; ist dann also $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ und N_0 das kleinste $n \in N_\sigma$ mit $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, so wähle man ein $N \in N_\sigma$ mit $N_0 \leqq F(N)$; wegen der Monotonie von F ist sodann $|r_n - s_n| < \varepsilon$ für $n \geqq N$. Nach Konstruktion der $a(n)$, $b(n)$ gilt wegen $a(n) \in A$, $b(n) \in B$ trivial: $a \in A \wedge b \in B' \to r_n \leqq b \wedge a \leqq s_n$. Ist schließlich $[r_n, s_n] \overline{\overline{\subseteq}}_{\mathrm{I}} [u_n, v_n]$, also $r_n \leqq v_n \wedge u_n \leqq s_n$, und $a \in A$, $b \in B$, so gilt auch $u_n \leqq b \wedge a \leqq v_n$; denn wäre für ein $M \in N_\sigma$: $u_M > b \vee v_M < a$, so setzen wir

$$d = \begin{cases} u_M - b, & \text{falls } v_M \geqq a; \\ a - v_M, & \text{falls } u_M \leqq b; \\ \mathrm{Min}\,\{(u_M - b), (a - v_M)\}, & \text{falls } u_M > b \wedge v_M < a. \end{cases}$$

Weiterhin sei $N^* \in N_\sigma$ so bestimmt, daß $|r_n - s_n| < d$ ist für $n \geqq N^*$. Für $N = M + N^*$ haben wir dann: $u_N > b \vee v_N < a$, $u_N - b \geqq d \vee a - v_N \geqq d$, $|r_N - s_N| < d$. Wegen $u_N \leqq s_N \wedge r_N \leqq v_N$, $r_N \leqq b \wedge a \leqq s_N$ wäre

$$s_N - r_N \geqq u_N - b \geqq d \vee s_N - r_N \geqq a - v_N \geqq d$$

im Widerspruch zu $s_N - r_N = |r_N - s_N| < d$. Also erfüllt unser α^{**} die obige rechte Seite.

d) Zu jedem $\alpha^{**} \in C_\sigma{}^{**}$ gibt es ein $\alpha \in C_\sigma$, so daß die obige rechte Seite gilt. Es sei $\alpha^{**} = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$. Man bilde $A \subseteq R_\sigma$ zu: $x \in A \leftrightarrow \exists n\, x < r_n$; $B = R_\sigma \setminus A$. Es ist dann $\alpha = [A, B] \in D_\sigma$. α erfüllt aber auch die Hölder-Bedingung: Ist $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$, so wähle man ein $N \in N_\sigma$ mit $|r_n - s_n| < \frac{\delta}{2}$ für $n \geqq N$; dann ist $a = r_N - \frac{\delta}{2} \in A \left(\text{da } r_N - \frac{\delta}{2} < r_N\right)$, $b = r_N + \frac{\delta}{2} \in B$ (da es nie ein r_n gibt mit $s_N < r_n$, weil ja sonst $s_{N+n} < r_{n+N}$ im Widerspruch zu $r_{n+N} \leqq s_{n+N}$ wäre) und $b - a = \delta$. Ist nun $a \in A$, $b \in B$, so ist sofort $r_n \leqq b \wedge a \leqq s_n$; denn wäre für ein N: $b < r_N$, so wäre $b \in A$; wäre für ein M: $s_M < a$, so wäre $s_M \in A$ im Gegensatz zu $s_n \in B$ (da es zu keinem s_n ein r_m gibt mit $s_n < r_m$). Ist schließlich $[u_n, v_n]$ ein beliebiger Repräsentant von $\alpha^{**} = C_\sigma{}^{**}(r_n, s_n)$, so zeigt man wörtlich wie unter c, daß dann auch für $a \in A$, $b \in B$ gilt: $u_n \leqq b \wedge a \leqq v_n$.

Aus dem Beweis (Teil c) dieses Satzes entnehmen wir noch, daß jedes reelle $\alpha^{**} \in C_\sigma{}^{**}$ einen Repräsentanten $[r_n, s_n]$ der folgenden Form besitzt:

$$n_1 < n_2 \to r_{n_1} < r_{n_2} \wedge s_{n_2} < s_{n_1},$$

$$r_n < s_n.$$

Jede reelle Ordinalzahl $\alpha \in C_\sigma$ kann also durch eine echt monotone Intervallschachtelung in R_σ approximiert werden.

Auf Grund von Satz 4 könnte man später die Rechenoperationen für reelle Ordinalzahlen $\alpha \in C_\sigma$ innerhalb $C_\sigma{}^{**}$ erklären, indem man sie in $C_\sigma{}^{**}$ einführt und vermittels $\varphi_\sigma{}^{**}$ auf C_σ überträgt. Ist $\alpha \in C_\sigma$, so verstehen wir im folgenden unter α^* bzw. α^{**} stets $\alpha^* = \varphi_\sigma{}^*(\alpha) \in C_\sigma{}^*$ bzw. $\alpha^{**} = \varphi_\sigma{}^{**}(\alpha) \in C_\sigma{}^{**}$.

3. Die *Anordnungsbeziehung* läßt sich innerhalb D_σ erklären. Für Elemente $\alpha_1, \alpha_2 \in D_\sigma$ definieren wir: $\alpha_1 \underset{D}{<} \alpha_2$ genau dann, wenn gilt

$$\alpha_1 = [A_1, B_1] \wedge \alpha_2 = [A_2, B_2] \to A_1 \subset A_2.$$

„$\underset{D}{<}$" ist dann eine irreflexive Ordnung in D_σ (und damit auch in C_σ). Definiert man $\alpha \underset{D}{\leqq} \beta$ als $\alpha \underset{D}{<} \beta \vee \alpha = \beta$, so ist „$\underset{D}{\leqq}$" eine reflexive Ordnung in D_σ (und damit auch in C_σ). Die Ordnungsbeziehung für Elemente $\alpha \in C_\sigma$ läßt sich z. B. auch über $C_\sigma{}^*$ einführen. Wir definieren für Elemente $\alpha_1, \alpha_2 \in C_\sigma{}^* : \alpha_1 \underset{C}{<} \alpha_2$ genau dann, wenn gilt

$$\alpha_1 = C_\sigma{}^*(r_n{}^1) \wedge \alpha_2 = C_\sigma{}^*(r_n{}^2) \to$$

$$\to \exists d \exists N (d \in R_\sigma,\ d > 0,\ N \in N_\sigma \wedge \forall n (n \in N_\sigma,\ n \geqq N \to r_n{}^2 - r_n{}^1 \geqq d)).$$

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1 und α_2; denn ist $\alpha_1 = C_\sigma{}^*(r_n{}^1) = C_\sigma{}^*(s_n{}^1)$, $\alpha_2 = C_\sigma{}^*(r_n{}^2) = C_\sigma{}^*(s_n{}^2)$, so ist $(r_n{}^1) \underset{G}{=} (s_n{}^1)$ und $(r_n{}^2) \underset{G}{=} (s_n{}^2)$, also für $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $M \in N_\sigma$, so daß für alle $n \in N_\sigma$ mit $n \geqq M$ gilt: $|r_n{}^1 - s_n{}^1|, |r_n{}^2 - s_n{}^2| < \varepsilon$. Ist dann $r_n{}^2 - r_n{}^1 \geqq d > 0$ für $n \geqq N$ und M so gewählt, daß $|r_n{}^1 - s_n{}^1|, |r_n{}^2 - s_n{}^2| < \frac{d}{4}$ für $n \geqq M$, so ist schließlich $s_n{}^2 - s_n{}^1 \geqq \frac{d}{2}$ für $n \geqq M + N$. „$\underset{C}{<}$" ist eine irreflexive Ordnung in $C_\sigma{}^*$ und „$\underset{C}{\leqq}$" — bei $\alpha \underset{C}{\leqq} \beta$ genau dann, wenn $\alpha \underset{C}{<} \beta \vee \alpha = \beta$ — eine reflexive Ordnung in $C_\sigma{}^*$.

Satz 5. *Für* $\alpha, \beta \in C_\sigma$ *gilt* $\alpha \underset{D}{<} \beta \leftrightarrow \varphi_\sigma{}^*(\alpha) \underset{C}{<} \varphi_\sigma{}^*(\beta)$.

Beweis. Es sei $\alpha = [A, B], \beta = [C, D]$, $\varphi_\sigma{}^*(\alpha) = \alpha^* = C_\sigma{}^*(r_n)$, $\varphi_\sigma{}^*(\beta) = \beta^* = C_\sigma{}^*(s_n)$. Dann gilt also: Wenn $a \in A, b \in B$, wobei b nicht das kleinste Element von B ist, so gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $a < r_n < b$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$; ebenso gibt es zu $c \in C, d \in D$, wobei d nicht das kleinste Element von D ist, ein $N \in N_\sigma$ mit $c < s_n < d$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$. Ist dann $\alpha \underset{D}{<} \beta$ so ist $A \subset C$; es sei $c \notin A$, $c \in C$, also $c \in B$. Da C kein größtes Element enthält, kann man c so wählen, daß es nicht das kleinste Element von B ist. Zu c gibt es noch ein Element $c' \in C$ mit $c < c'$ und etwa $c' - c = \delta$. Wählen wir jetzt irgendein $a \in A$ und ein $d \in D$ (welches nicht das kleinste Element von D ist), so gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $a < r_n < c < c' < s_n < d$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$; also $s_n - r_n \geqq \delta$ für $n \geqq N$, also $\alpha^* \underset{C}{<} \beta^*$. Ist umgekehrt $\alpha^* \underset{C}{<} \beta^*$, so kann wegen eben nicht $\beta \underset{D}{\leqq} \alpha$ sein, also $\alpha \underset{D}{<} \beta$.

Auf Grund dieses Isomorphiesatzes braucht man für Elemente $\alpha \in C_\sigma$ nicht zu unterscheiden zwischen „$\underset{D}{<}$" und „$\underset{C}{<}$" (für die Bilder $\alpha^* \in C_\sigma{}^*$); wir wählen deshalb von nun an generell für „$\underset{D}{<}$" und „$\underset{C}{<}$" die gemeinsame Bezeichnung „$\underset{C}{<}$"[1]).

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „C" auch weg.

4. Die *Summe* $\alpha_1 \underset{c}{+} \alpha_2$[1]) reeller Ordinalzahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in C_\sigma$ werde definiert als diejenige reelle Ordinalzahl $\alpha \in C_\sigma$, für die gilt $\alpha_1^* = C_\sigma^*(r_n^1) \wedge \alpha_2^* = C_\sigma^*(r_n^2) \to \alpha^* = C_\sigma^*(r_n^1 + r_n^2)$. Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1^* und α_2^*. Ist $r \in R_\sigma$, so sei (r) die *stationäre Fundamentalfolge* (r_n) in R_σ mit $r_n = r$. Dann ist $\underset{c}{0}$[1]) diejenige reelle Ordinalzahl $\alpha \in C_\sigma$ mit $\alpha^* = C_\sigma^*(0)$. Die *Inverse* $\underset{c}{(-\alpha)}$[1]) von $\alpha \in C_\sigma$ sei diejenige reelle Ordinalzahl $\beta \in C_\sigma$ mit: $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n) \to \beta^* = C_\sigma^*(-r_n)$. Aus den Definitionen folgen sofort die Sätze (jeweils für festes C_σ):

Satz 6. (1) $(-(-\alpha)) = \alpha$, (2) $(-0) = 0$, (3) $(-(\alpha + \beta)) = (-\alpha) + (-\beta)$,

(4) $\alpha < \beta \leftrightarrow (-\beta) < (-\alpha)$.

Satz 7. (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

(2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

(3) $\alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta$,

(4) $\alpha + 0 = \alpha$,

(5) $\alpha + (-\alpha) \quad = 0$.

Aus Satz 7 folgt:

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2,$$
$$\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2,$$
$$\alpha + \beta = \alpha \to \beta = 0.$$

Zu reellen Ordinalzahlen $\alpha \in C_\sigma$, $\beta \in C_\sigma$ gibt es genau eine reelle Ordinalzahl $\gamma \in C_\sigma$ mit $\alpha + \gamma = \beta$, nämlich $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Man definiert dann die *Differenz* $\alpha \underset{c}{-} \beta$[1]) als diejenige reelle Ordinalzahl γ, für die $\beta \underset{c}{+} \gamma = \alpha$ ist. Es gelten sofort die Sätze:

Satz 8. (1) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$,

(2) $\alpha - \beta = (-(\beta - \alpha))$,

(3) $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = (-\alpha)$, $\alpha - \beta = 0 \leftrightarrow \alpha = \beta$,

(4) $(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma)$.

Satz 9. (1) $\alpha < \beta \leftrightarrow \beta - \alpha > 0$,

(2) $\alpha < \beta \leftrightarrow \exists \gamma (\gamma > 0 \wedge \alpha + \gamma = \beta)$.

5. Das *Produkt* $\alpha_1 \underset{c}{\cdot} \alpha_2$[1]) reeller Ordinalzahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in C_\sigma$ werde definiert als diejenige reelle Ordinalzahl $\alpha \in C_\sigma$, für die gilt

$$\alpha_1^* = C_\sigma^*(r_n^1) \wedge \alpha_2^* = C_\sigma^*(r_n^2) \to \alpha^* = C_\sigma^*(r_n^1 \cdot r_n^2).$$

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „C" auch weg.

Diese Definition ist unabhängig von den Repräsentanten von α_1^* und $\alpha_2^* \cdot 1$[1]) sei diejenige reelle Ordinalzahl $\alpha \in C_\sigma$ mit $\alpha^* = C_\sigma^*(1)$. Für $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha \neq \underset{c}{0}$ sei die *Reziproke* α^{-1}[1]) diejenige reelle Ordinalzahl $\beta \in C_\sigma$ mit

$$\alpha^* = C_\sigma^*(r_n) \wedge |r_n| \geqq d > 0 \text{ (für ein } d \in R_\sigma,\ d > 0) \to \beta^* = C_\sigma^*\left(\frac{1}{r_n}\right).$$

Zum Nachweis dafür, daß die Definition der Reziproken sinnvoll ist, dient folgender

Hilfssatz. *Ist* $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha \neq \underset{c}{0}$, *so gibt es eine Fundamentalfolge* (r_n) *in* R_σ *und ein* $d \in R_\sigma$, $d > 0$ *mit* $|r_n| \geqq d$ *und* $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$.

Beweis. Es sei $\alpha^* = C_\sigma^*(s_n)$; $\underset{c}{0}^* = C_\sigma^*(0)$. Wenn $\alpha \neq \underset{c}{0}$, so $\alpha^* < \underset{c}{0} \vee \underset{c}{0} < \alpha^*$, also gibt es ein $d \in R_\sigma$, $d > 0$ und ein $N \in N_\sigma$ mit $|s_n| \geqq d > 0$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$. Man bilde dann die Folge (r_n) mit $r_n = s_{N+n}$. (r_n) ist eine Fundamentalfolge in R_σ; denn wenn $|s_n - s_{n^*}| < \varepsilon$ für $n, n^* \geqq N_0$ ist, so erst recht $|r_n - r_{n^*}| < \varepsilon$ für $n, n^* \geqq N_0$. Es ist auch $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$; denn $|r_n - s_n| < \varepsilon$ für $n \geqq N_0$; schließlich gilt nach Konstruktion: $|r_n| \geqq d$.

Satz 10. (1) $\alpha \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot \beta = \big(-(\alpha \cdot \beta)\big)$,

(2) $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.

Satz 11. (1) $\alpha \neq 0 \to (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, (2) $1^{-1} = 1$,

(3) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \to (\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$,

(4) $\alpha \neq 0 \to (-\alpha)^{-1} = \big(-(\alpha^{-1})\big)$,

(5) $\alpha \cdot \beta > 0 \mathrel{\dot{\to}} \alpha < \beta \leftrightarrow \beta^{-1} < \alpha^{-1}$,

$\alpha \cdot \beta < 0 \mathrel{\dot{\to}} \alpha < \beta \leftrightarrow \alpha^{-1} < \beta^{-1}$.

Satz 12. (1) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

(2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

(3) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

(4) $\begin{cases} \beta > 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta < \alpha_2 \cdot \beta, \\ \beta < 0 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \beta > \alpha_2 \cdot \beta, \end{cases}$

(5) $\alpha \cdot 1 = \alpha$,

(6) $\alpha \neq 0 \to \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$,

(7) $\alpha \cdot 0 = 0$.

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „C" auch weg.

Aus Satz 12 folgt:

$$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 = \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2,$$
$$\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 < \beta_2,$$
$$\alpha < 0 \wedge \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2 \to \beta_1 > \beta_2,$$
$$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta = \alpha \to \beta = 1,$$
$$\alpha \cdot \beta = 0 \to \alpha = 0 \vee \beta = 0.$$

Zu reellen Ordinalzahlen $\alpha \in C_\sigma$, $\beta \in C_\sigma$ mit $\alpha \neq 0$ gibt es genau eine reelle Ordinalzahl $\gamma \in C_\sigma$ mit $\alpha \cdot \gamma = \beta$, nämlich $\gamma = \beta \cdot \alpha^{-1}$. Man definiert dann für $\beta \neq_c 0$ den *Quotienten* $\alpha :_c \beta$[1]) bzw. $\frac{\alpha}{\beta}{}_c$[1]), als diejenige reelle Ordinalzahl γ, für die $\beta \cdot_c \gamma = \alpha$ ist. Es gelten sofort die Sätze:

Satz 13. (1) $\beta \neq 0 \to \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$,

(2) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \to \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$,

(3) $\alpha \neq 0 \to \frac{0}{\alpha} = 0, \quad \frac{\alpha}{1} = \alpha, \quad \alpha \neq 0 \to \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}$,

$\beta \neq 0 \to \frac{\alpha}{\beta} = 1 \leftrightarrow \alpha = \beta$,

(4) $\beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 \to (\alpha : \beta) : \gamma = \alpha : (\beta \cdot \gamma)$.

Satz 14. (1) $\alpha > 0 \to \alpha < \beta \leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1$,

(2) $\alpha > 0 \to \alpha < \beta \leftrightarrow \exists \gamma\, (\gamma > 0 \wedge \alpha \cdot \gamma = \beta)$.

Satz 15. (1) $\beta \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta} \pm \frac{\alpha_2}{\beta} = \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta}$,

(2) $\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta_1} \pm \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2 \pm \alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_2}$,

(3) $\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\beta_1 \cdot \beta_2}$,

(4) $\beta_1 \neq 0 \wedge \beta_2 \neq 0 \wedge \alpha_2 \neq 0 \to \frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\alpha_2 \cdot \beta_1}$.

6. Eine reelle Ordinalzahl $\alpha \in C_\sigma$ heiße *positiv* bzw. *negativ*, je nachdem $\alpha >_c 0$ oder $\alpha <_c 0$ ist. Es gilt der

Satz 16. (1) $\begin{cases} \alpha > 0 \wedge \beta > 0 \to \alpha + \beta > 0, \\ \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \to \alpha + \beta < 0, \end{cases}$

(2) $(\alpha > 0 \wedge \beta > 0) \vee (\alpha < 0 \wedge \beta < 0) \leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$.

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „C" auch weg.

Weiterhin gilt:

$$\alpha > 0 \leftrightarrow (-\alpha) < 0, \quad \alpha < 0 \leftrightarrow (-\alpha) > 0, \quad \alpha \neq 0 \leftrightarrow (-\alpha) \neq 0;$$

$$\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha > 0 \leftrightarrow \alpha^{-1} > 0, \quad \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha < 0 \leftrightarrow \alpha^{-1} < 0; \quad \alpha \neq 0 \leftrightarrow \alpha^{-1} \neq 0.$$

Der *absolute Betrag* reeller Ordinalzahlen $\alpha \in C_\sigma$ wird definiert zu

$$|\alpha|_{\mathrm{c}}^{1}) = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \alpha \underset{\mathrm{c}}{\geqq} \underset{\mathrm{c}}{0}. \\ (-\alpha), & \text{falls } \alpha \underset{\mathrm{c}}{<} \underset{\mathrm{c}}{0}. \end{cases}$$

Dann gilt

Satz 17. (1) $|\alpha| \geqq 0, \quad |\alpha| = 0 \leftrightarrow \alpha = 0;$

(2) $|(-\alpha)| = |\alpha|, \alpha \neq 0 \rightarrow |\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1};$

(3) $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|, |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geqq 0;$

(4) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|;$

(5) $||\alpha| - |\beta|| \leqq |\alpha - \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$

$\alpha \in C_\sigma$ nennen wir eine *rationale reelle Ordinalzahl bezüglich* R_σ, falls es eine rationale Ordinalzahl $r \in R_\sigma$ gibt mit $\alpha^* = C_\sigma^*(r)$, wobei (r) die stationäre Fundamentalfolge (r_n) in R_σ bedeutet mit $r_n = r$; es gibt dann genau eine solche rationale Ordinalzahl $r \in R_\sigma$; denn wenn $\alpha^* = C_\sigma^*(r) = C_\sigma^*(s)$, so wäre $(r) \underset{\mathrm{c}}{=} (s)$, also bei $r \neq s$ und $r_n = r$, $s_n = s$: $|r_n - s_n| < |r - s|$ für $n \geqq N$, was ein Widerspruch ist. $\alpha \in C_\sigma$ heißt *irrational*, falls α nicht rational ist. Es sei $\varphi_\sigma(\alpha)$ die eineindeutige Abbildung der Menge aller rationalen reellen Ordinalzahlen $\alpha \in C_\sigma$ auf die Menge R_σ aller rationalen Ordinalzahlen $r \in R_\sigma$ mit

$$\varphi_\sigma(\alpha) = r \leftrightarrow \alpha^* = C_\sigma^*(r);$$

dann gilt der

Satz 18. *φ_σ ist eine isomorphe Abbildung; d. h., für rationale reelle Ordinalzahlen $\alpha, \beta \in C_\sigma$ gilt*

$$\varphi_\sigma(\alpha \underset{\mathrm{c}}{+} \beta) = \varphi_\sigma(\alpha) + \varphi_\sigma(\beta),$$

$$\varphi_\sigma(\alpha \underset{\mathrm{c}}{-} \beta) = \varphi_\sigma(\alpha) - \varphi_\sigma(\beta),$$

$$\varphi_\sigma(\alpha \underset{\mathrm{c}}{\cdot} \beta) = \varphi_\sigma(\alpha) \cdot \varphi_\sigma(\beta),$$

$$\beta \neq \underset{\mathrm{c}}{0} \rightarrow \varphi_\sigma(\alpha \underset{\mathrm{c}}{:} \beta) = \varphi_\sigma(\alpha) : \varphi_\sigma(\beta),$$

$$\alpha \underset{\mathrm{c}}{<} \beta \leftrightarrow \varphi_\sigma(\alpha) < \varphi_\sigma(\beta),$$

$$\varphi_\sigma(\underset{\mathrm{c}}{0}) = 0, \quad \varphi_\sigma(\underset{\mathrm{c}}{1}) = 1, \quad \varphi_\sigma(\underset{\mathrm{c}}{-}\alpha) = -\varphi_\sigma(\alpha), \quad \alpha \neq \underset{\mathrm{c}}{0} \rightarrow \varphi_\sigma(\alpha \overset{\mathrm{c}}{}^{-1}) = \varphi_\sigma(\alpha)^{-1},$$

$$\varphi_\sigma(|\alpha|_{\mathrm{c}}) = |\varphi_\sigma(\alpha)|.$$

---

[1]) Sind im folgenden keine Verwechslungen zu befürchten, so lassen wir den Index „C" auch weg.

Nach Satz 18 ist also R_σ isomorph in C_σ eingebettet, und man kann die eingeführten Symbole im Bereich der reellen Ordinalzahlen aus C_σ zusammenfallen lassen mit den bisherigen Symbolen im Bereich der rationalen Ordinalzahlen $(+, -, \cdot, :, <, 0{,}1, (- \cdots), {}^{-1}, |\cdots|)$; statt α, wo $\alpha^* = C_\sigma^*(r)$ ist, schreiben wir einfach r. Die rationalen reellen Ordinalzahlen nennen wir einfach wieder *rationale Ordinalzahlen*.

Mit diesen Vereinbarungen gilt dann: Wenn $\alpha \in D_\sigma$ und $\alpha = [A, B]$, so ist: $a \in A \to a < \alpha$, $b \in B \to \alpha \leqq b$; falls b nicht das kleinste Element von B ist, gilt sogar $\alpha < b$. Für $a, b \in R_\sigma$ ist: $a < \alpha \to a \in A$, $\alpha \leqq b \to b \in B$. Wenn $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$ und $r_{n_1} \leqq r_{n_2}$ für $n_1 < n_2$, so ist $r_n \leqq \alpha$; analog bei $r_{n_1} < r_{n_2}$, $r_{n_1} \geqq r_{n_2}$, $r_{n_1} > r_{n_2}$ für $n_1 < n_2$: $r_n < \alpha$, $r_n \geqq \alpha$, $r_n > \alpha$. Insbesondere gilt also: $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha^{**} = C_\sigma^{**}(r_n, s_n)$, dann ist stets $r_n \leqq \alpha \leqq s_n$; ist die Intervallschachtelung $[r_n, s_n]$ in R_σ echt monoton, so ist sogar $r_n < \alpha < s_n$ für $n \in N_\sigma$.

Ist $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon \in R_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ mit $|r_n - \alpha| < \varepsilon$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$. Ist nämlich $\alpha = [A, B]$ und $a \in A$, $b \in B$, wobei b nicht kleinstes Element von B ist, und $b - a = \varepsilon$, so gibt es nach Satz 3 ein $N \in N_\sigma$ mit $a < r_n < b$ für $n \geqq N$; außerdem ist $a < \alpha < b$ (siehe oben); also $|r_n - \alpha| < b - a = \varepsilon$ für $n \geqq N$. Nach der folgenden Bemerkung, wonach es für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $r \in R_\sigma$ gibt mit $0 < r \leqq \varepsilon$, können wir dann auch feststellen: Ist $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha^* = C_\sigma^*(r_n)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ mit $|r_n - \alpha| < \varepsilon$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$.

Ist $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $r \in R_\sigma$ mit $0 < r \leqq \varepsilon$. Es sei etwa $\varepsilon^* = C_\sigma^*(r_n)$, wo (r_n) monoton wächst; dann ist ja wegen $\varepsilon > 0$ für ein $N \in N_\sigma$: $n \geqq N \to r_n > 0$; andererseits gilt aber $r_n \leqq \varepsilon$; also gibt es ein $r \in R_\sigma$ mit $0 < r \leqq \varepsilon$. Hieraus und aus der Approximierbarkeit der reellen Ordinalzahlen aus C_σ durch echt monotone Intervallschachtelungen in R_σ ergibt sich allgemeiner: Wenn $\alpha \in C_\sigma$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, so gibt es $\|\omega_\sigma\|$ viele rationale Ordinalzahlen $r \in R_\sigma$ und ebensoviele rationale Ordinalzahlen $s \in R_\sigma$ mit $r < \alpha < s$ und $|\alpha - r|, |\alpha - s| < \varepsilon$. Es gilt auch allgemein: Wenn $\alpha \in D_\sigma$, $\beta \in D_\sigma$ und $\alpha < \beta$, so gibt es $\|\omega_\sigma\|$ viele rationale Ordinalzahlen $r \in R_\sigma$ mit $\alpha < r < \beta$; dazu genügt es zu zeigen, daß es wenigstens ein solches r gibt (denn dann gibt es auch ein $r' \in R_\sigma$ mit $r < r' < \beta$, außerdem gibt es $\|\omega_\sigma\|$ viele $s \in R_\sigma$ mit $r < s$ und $|r - s| < r' - r$). Ist aber $\alpha = [A, B]$, $\beta = [C, D]$ und $\alpha < \beta$, so ist $A \subset C$, also gibt es ein $r' \in C$ mit $r' \in B$; da C kein größtes Element besitzt, gibt es auch ein $r' < r \in C$ mit $r \in B$, wobei r jetzt nicht das kleinste Element von B ist; also $\alpha < r < \beta$ bei $r \in R_\sigma$.

7. Wir wenden uns jetzt den transfiniten reellen Dedekindschen Schnitten, Fundamentalfolgen und Intervallschachtelungen zu.

Das geordnete Paar $[A, B]$ von Teilmengen $A \subseteq D_\sigma$, $B \subseteq D_\sigma$ heiße ein *Dedekindscher Schnitt in* D_σ, falls gilt

$$A \cup B = D_\sigma, \quad A \cap B = \varnothing, \quad a \in A \wedge b \in B \to a < b.$$

Satz 19. *Zu jedem Dedekindschen Schnitt* $[A, B]$ *in* D_σ *gibt es genau ein Schnittelement* $\alpha \in D_\sigma$ *mit*

$$x \in A \to x \leqq \alpha, \quad y \in B \to \alpha \leqq y.$$

Für α *gilt dann sofort*: $x \in D_\sigma \wedge x < \alpha \to x \in A$, $y \in D_\sigma \wedge \alpha < y \to y \in B$.

Beweis. Es kann zunächst nur höchstens ein Schnittelement geben; denn wären α, β zwei solche Schnittelemente mit etwa $\alpha < \beta$, so wäre doch für ein existierendes $r \in R_\sigma$: $\alpha < r < \beta$; dann wäre $r \in B$ wegen $\alpha < r$ und $r \in A$ wegen $r < \beta$, was ein Widerspruch ist. Es gibt aber auch mindestens ein Schnittelement α: Man definiere in R_σ den DEDEKINDschen Schnitt $\alpha = [A_\alpha, B_\alpha]$ folgendermaßen:

$$x \in A_\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x \in R_\sigma \cap A, \text{ falls } R_\sigma \cap A \text{ kein größtes Element besitzt;} \\ x \in (R_\sigma \cap A) \setminus \{g\}, \text{ falls } R_\sigma \cap A \text{ das größte Element } g \text{ besitzt;} \end{cases}$$

$$B_\alpha = R_\sigma \setminus A_\alpha.$$

Dieser (rationale) DEDEKINDsche Schnitt in R_σ erfüllt die geforderte Bedingung: $x \in A \to x \leqq \alpha$, $y \in B \to \alpha \leqq y$. Ist nämlich $x = [A_x, B_x]$ (als rationaler DEDEKINDscher Schnitt in R_σ) bzw. $y = [A_y, B_y]$, so ist trivialerweise $A_x \subseteq A_\alpha$ bzw. $A_\alpha \subseteq A_y$.

Der DEDEKINDsche Schnitt $[A, B]$ in D_σ erfülle die HÖLDER-*Bedingung*, falls es zu jedem $\delta \in C_\sigma$, $\delta > 0$ zwei reelle Ordinalzahlen $a \in A \cap C_\sigma$, $b \in B \cap C_\sigma$ gibt mit $b - a = \delta$.

Satz 20. *Zu jedem* DEDEKIND*schen Schnitt* $[A, B]$ *in* D_σ *mit* HÖLDER-*Bedingung gibt es genau ein Schnittelement* $\alpha \in C_\sigma$ *mit*

$$x \in A \wedge y \in B \to x \leqq \alpha \leqq y.$$

Beweis. Nach Satz 19 gibt es genau ein Element $\alpha \in D_\sigma$ mit

$$x \in A \wedge y \in B \to x \leqq \alpha \leqq y.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\alpha \in C_\sigma$ ist. Dazu müssen wir zeigen, daß es zu vorgegebenem $\delta \in R_\sigma$, $\delta > 0$ rationale Ordinalzahlen $r, s \in R_\sigma$ gibt mit $r < \alpha \leqq s$ und $s - r = \delta$. Für $\frac{\delta}{2}$ gibt es aber nach der vorausgesetzten HÖLDER-Bedingung Elemente $a, b \in C_\sigma$ mit $a \leqq \alpha \leqq b$ und $b - a = \frac{\delta}{2}$. Sei nun $r \in R_\sigma$ mit $a - \frac{\delta}{4} < r < a$ und $s = r + \delta$, so ist $r, s \in R_\sigma$, $s - r = \delta$ und $r < \alpha \leqq s$ $\left(\text{wegen } r < a \leqq \alpha \text{ und } s > b + \frac{\delta}{4} > b \geqq \alpha\right)$.

Das geordnete Paar $[A, B]$ von Teilmengen $A \subseteq C_\sigma$, $B \subseteq C_\sigma$ heiße ein DEDEKINDscher *Schnitt in* C_σ, falls gilt

$$A \cup B = C_\sigma, \quad A \cap B = \varnothing, \quad a \in A \wedge b \in B \to a < b.$$

Satz 21. *Zu jedem* DEDEKIND*schen Schnitt* $[A, B]$ *in* C_σ *gibt es genau ein Schnittelement* $\alpha \in D_\sigma$ *mit*

$$x \in A \to x \leqq \alpha, \quad y \in B \to \alpha \leqq y.$$

Für α *gilt dann sofort*: $x \in C_\sigma \wedge x < \alpha \to x \in A$, $y \in C_\sigma \wedge \alpha < y \to y \in B$.

Der DEDEKINDsche Schnitt $[A, B]$ in C_σ erfülle die HÖLDER-*Bedingung*, falls es zu jedem $\delta \in C_\sigma$, $\delta > 0$ zwei reelle Ordinalzahlen $a \in A$, $b \in B$ gibt mit $b - a = \delta$.

Satz 22. *Zu jedem* Dedekindschen *Schnitt* $[A, B]$ *in* C_σ *mit* Hölder-*Bedingung gibt es genau ein Schnittelement* $\alpha \in C_\sigma$ *mit*

$$x \in A \wedge y \in B \to x \leqq \alpha \leqq y.$$

Die Sätze 21 und 22 beweist man analog wie die Sätze 19 und 20. Aus den Sätzen 19 bis 22 folgt: Ist $[A, B]$ ein Dedekindscher Schnitt in D_σ, so ist die Schnittzahl α entweder größtes Element von A oder kleinstes Element von B. Erfüllt $[A, B]$ nicht die Hölder-Bedingung, so gilt für die Schnittzahl $\alpha : \alpha \notin C_\sigma$ $\Big($sonst wäre ja für $\delta \in C_\sigma, \delta > 0 : a = \alpha - \frac{\delta}{2} < \alpha < \alpha + \frac{\delta}{2} = b$, also $a \in A \cap C_\sigma$, $b \in B \cap C_\sigma$, $b - a = \delta\Big)$. $A \cap C_\sigma$ besitzt dann kein größtes Element und $B \cap C_\sigma$ kein kleinstes. Ist $[A, B]$ ein Dedekindscher Schnitt in C_σ mit Hölder-Bedingung, so ist die Schnittzahl α entweder größtes Element von A oder kleinstes Element von B. Erfüllt $[A, B]$ nicht die Hölder-Bedingung, so gilt für die Schnittzahl $\alpha : \alpha \notin C_\sigma$. A besitzt dann kein größtes Element und B kein kleinstes.

In Umkehrung der Sätze 19 bis 22 gilt

Satz 23. *Jede reelle Ordinalzahl* $\alpha \in D_\sigma$ *ist die Schnittzahl eines* Dedekindschen *Schnittes* $[A, B]$ *in* D_σ *und eines* Dedekindschen *Schnittes* $[A^*, B^*]$ *in* C_σ; *ist* $\alpha \in C_\sigma$, *so erfüllt jeder* Dedekindsche *Schnitt* $[A, B]$ *in* D_σ *und jeder* Dedekindsche *Schnitt* $[A^*, B^*]$ *in* C_σ, *deren beider Schnittzahl* α *ist, die* Hölder-*Bedingung.*

Beweis. Ist $\alpha \in D_\sigma$, so bilde man etwa: A = Menge aller $x \in D_\sigma$ mit $x < \alpha$, $B = D_\sigma \setminus A$; ebenso A^* = Menge aller $x \in C_\sigma$ mit $x < \alpha$, $B^* = C_\sigma \setminus A^*$. $[A, B]$ und $[A^*, B^*]$ bilden dann gewünschte Schnitte. Die weiteren Behauptungen von Satz 23 folgen aus obigen Bemerkungen.

Ein Dedekindscher Schnitt $[A, B]$ in D_σ (in C_σ) erfüllt also genau dann die Hölder-Bedingung, wenn für seine Schnittzahl α gilt: $\alpha \in C_\sigma$.

Wir wenden uns nun den reellen Fundamentalfolgen zu und vereinbaren, daß im folgenden unter *Zahlenfolgen innerhalb* C_σ stets Folgen vom Typus ω_σ mit Elementen aus C_σ zu verstehen sind.

Eine Zahlenfolge (ϱ_n) aus C_σ heiße *Fundamentalfolge in* C_σ, falls gilt: Für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $|\varrho_n - \varrho_{n^*}| < \varepsilon$ für $n, n^* \in N_\sigma$ und $n, n^* \geqq N$.

Satz 24. *Jede Fundamentalfolge* (ϱ_n) *in* C_σ *ist beschränkt, d. h., es gibt ein* $K \in C_\sigma$ *mit* $|\varrho_n| < K$ *für alle* $n \in N_\sigma$.

Beweis. Es gibt ein N mit $|\varrho_n - \varrho_{n^*}| < 1$ für $n, n^* \geqq N$; dann gilt für $n \geqq N$: $|\varrho_n| = |(\varrho_n - \varrho_N) + \varrho_N| \leqq |\varrho_n - \varrho_N| + |\varrho_N| < 1 + |\varrho_N|$. Nach dem folgenden Lemma existiert dann aber ein $K \in C_\sigma$ mit: $|\varrho_0|, |\varrho_1|, \ldots, |\varrho_N| + 1 < K$.

Lemma *Ist* $M \subseteq C_\sigma$ *und* $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$, *so ist* M *beschränkt, d. h., es gibt ein* $K \in C_\sigma$ *mit* $\varrho \in M \to |\varrho| < K$.

Beweis. $M = \varnothing$ ist trivial. Für $M \neq \varnothing$ wähle man zu jedem $\varrho \in M$ genau ein $r_\varrho \in R_\sigma$ aus mit $|\varrho - r_\varrho| < 1$. Dann ist die Menge $\mathfrak{R}$ all dieser r_ϱ von derselben Mächtigkeit wie M, also nach dem früheren Lemma im rationalen Fall beschränkt, d. h., es gibt ein $K^* \in R_\sigma \subseteq C_\sigma$ mit: $r_\varrho \in \mathfrak{R} \to |r_\varrho| < K^*$. Dann gilt aber schließlich: $\varrho \in M \to |\varrho| = |(\varrho - r_\varrho) + r_\varrho| \leqq |\varrho - r_\varrho| + |r_\varrho| < 1 + K^* = K \in C_\sigma$.

Wir sagen, die Zahlenfolge (ϱ_n) aus C_σ *konvergiere gegen den Grenzwert* $\varrho \in C_\sigma$, falls es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $|\varrho_n - \varrho| < \varepsilon$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$. Die Folge (ϱ_n) *konvergiere* schlechthin, falls es ein $\varrho \in C_\sigma$ gibt, gegen das (ϱ_n) konvergiert.

Satz 25. *Jede konvergente Folge* (ϱ_n) *aus* C_σ *besitzt genau einen Grenzwert* $\varrho \in C_\sigma$, *gegen den sie konvergiert.*

Beweis. Wären $\varrho^1, \varrho^2 \in C_\sigma$ mit $|\varrho_n - \varrho^1|, |\varrho_n - \varrho^2| < \varepsilon$ für $n \geqq N$, so wäre dann auch bei $\varrho^1 \neq \varrho^2$ für ein N_1: $|\varrho_n - \varrho^1|, |\varrho_n - \varrho^2| < \dfrac{|\varrho^1 - \varrho^2|}{2}$ für $n \geqq N_1$, also auch

$$|\varrho^1 - \varrho^2| = |(\varrho^1 - \varrho_{N_1}) + (\varrho_{N_1} - \varrho^2)| \leqq |\varrho_{N_1} - \varrho^1| + |\varrho_{N_1} - \varrho^2| < 2\frac{|\varrho^1 - \varrho^2|}{2} = |\varrho^1 - \varrho^2|;$$

Widerspruch.

Der eindeutig bestimmte Grenzwert $\varrho \in C_\sigma$ der konvergenten Folge (ϱ_n) werde mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n$ bezeichnet oder kurz mit $\lim \varrho_n$.

Satz 26. *Eine Zahlenfolge* (ϱ_n) *aus* C_σ *ist Fundamentalfolge in* C_σ *genau dann, wenn sie konvergiert.*

Beweis. ($\leftarrow$) Ist $\lim \varrho_n = \varrho$, so gibt es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ mit $|\varrho_n - \varrho| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$; dann ist also für $n, n^* \geqq N$:

$$|\varrho_n - \varrho_{n^*}| = |(\varrho_n - \varrho) - (\varrho_{n^*} - \varrho)| \leqq |\varrho_n - \varrho| + |\varrho_{n^*} - \varrho| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\rightarrow$) Es sei für $n, n^* \geqq N$: $|\varrho_n - \varrho_{n^*}| < \varepsilon$ ($\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$); außerdem seien r_n rationale Ordinalzahlen aus R_σ mit $|r_n - \varrho_n| < \dfrac{1}{n+1}$; dann ist

$$|r_n - r_{n^*}| = |(r_n - \varrho_n) - (r_{n^*} - \varrho_n) + (\varrho_n - \varrho_{n^*})| < \frac{2}{N+1} + \varepsilon$$

für $n, n^* \geqq N$. Für ein $\varepsilon' \in R_\sigma$, $\varepsilon' > 0$ hat man also $|r_n - r_{n^*}| < \dfrac{2}{N'+1} + \dfrac{\varepsilon'}{2}$ für $n, n^* \geqq N'$; wählt man nach dem Archimedischen Axiom (im rationalen Fall) N'' so groß, daß $\dfrac{2}{N''+1} \leqq \dfrac{\varepsilon'}{2}$, also $4 \leqq \varepsilon'(N''+1)$, so hat man für $n, n^* \geqq N^* = N' + N''$: $|r_n - r_{n^*}| < \varepsilon'$; also ist (r_n) eine Fundamentalfolge in R_σ. Es sei $\varrho^* = C_\sigma{}^*(r_n)$ und $|r_n - \varrho| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqq N_0'$ (bei $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$); dann ist $|\varrho_n - \varrho| = |(\varrho_n - r_n) - (\varrho - r_n)| \leqq |\varrho_n - r_n| + |\varrho - r_n| < \dfrac{1}{N_0'+1} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqq N_0'$. Nach dem Archimedischen Axiom (im rationalen Fall) gibt es für ein $r \in R_\sigma$ mit $0 < r \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$ ein N_0'' mit $\dfrac{1}{N_0''+1} \leqq r$, also schließlich $|\varrho_n - \varrho| < \varepsilon$ für $n \geqq N_0 = N_0' + N_0''$; also $\lim \varrho_n = \varrho$.

Als Umkehrung gilt der

Satz 27. *Jede reelle Ordinalzahl* $\alpha \in C_\sigma$ *ist der Grenzwert einer Fundamentalfolge* (ϱ_n) *in* C_σ: $\alpha = \lim \varrho_n$.

Beweis. (ϱ_n) sei die Folge mit $\varrho_n = \alpha$.

Man kann jedes $\alpha \in C_\sigma$ auch als Grenzwert einer rationalen Fundamentalfolge (r_n) in C_σ erhalten; außerdem darf man dabei (r_n) echt monoton wachsend oder auch echt monoton fallend annehmen.

Das geordnete Paar $[\varrho_n, \sigma_n]$ von Zahlenfolgen (ϱ_n), (σ_n) aus C_σ heiße *Intervallschachtelung in* C_σ, falls gilt

(1) $n_1, n_2 \in N_\sigma \wedge n_1 < n_2 \to \varrho_{n_1} \leqq \varrho_{n_2} \wedge \sigma_{n_2} \leqq \sigma_{n_1}$,

(2) $n \in N_\sigma \to \varrho_n \leqq \sigma_n$,

(3) Zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in N_\sigma$, so daß $|\varrho_n - \sigma_n| < \varepsilon$ gilt für alle $n \in N_\sigma$ mit $n \geqq N$.

Die beiden Randfolgen (ϱ_n), (σ_n) einer Intervallschachtelung $[\varrho_n, \sigma_n]$ in C_σ sind sofort Fundamentalfolgen in C_σ. Die Intervallschachtelung $[\varrho_n, \sigma_n]$ in C_σ *erfasse* das Element $\alpha \in C_\sigma$, falls $\varrho_n \leqq \alpha \leqq \sigma_n$ gilt für alle $n \in N_\sigma$; es ist dann

$$\alpha = \lim \varrho_n = \lim \sigma_n .$$

Satz 28. *Jede Intervallschachtelung* $[\varrho_n, \sigma_n]$ *in* C_σ *erfaßt genau ein Element* $\alpha \in C_\sigma$.

Beweis. Ist $\varrho_n \leqq \alpha, \beta \leqq \sigma_n$, so ist $\lim \varrho_n = \alpha$, $\lim \varrho_n = \beta$; also $\alpha = \beta$. Ist andererseits $\lim \varrho_n = \alpha$, so ist $\varrho_n \leqq \alpha$, da (ϱ_n) monoton wächst. Es ist aber auch $\alpha \leqq \sigma_n$; denn für $n \geqq N$ ist $\sigma_n - \varrho_n < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\alpha - \varrho_n < \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$|\sigma_n - \alpha| = |(\sigma_n - \varrho_n) - (\alpha - \varrho_n)| < \varepsilon$$

für $n \geqq N$; also $\alpha = \lim \sigma_n$; also $\alpha \leqq \sigma_n$, da (σ_n) monoton fällt.

Satz 29. *Jede reelle Ordinalzahl* $\alpha \in C_\sigma$ *wird durch eine Intervallschachtelung* $[\varrho_n, \sigma_n]$ *in* C_σ *erfaßt.*

Beweis. (ϱ_n) und (σ_n) seien die Folgen mit $\varrho_n = \alpha = \sigma_n$.

Man kann jedes $\alpha \in C_\sigma$ auch erfassen von einer rationalen Intervallschachtelung $[r_n, s_n]$ in C_σ; außerdem darf man dabei (r_n) und (s_n) als echt monoton annehmen.

8. Als Anwendung der reellen DEDEKINDschen Schnitte zeigen wir jetzt, daß jede Menge reeller Ordinalzahlen aus D_σ in D_σ eine eindeutig bestimmte obere Grenze und eine eindeutig bestimmte untere Grenze besitzt. Ist $M \subseteq D_\sigma$, so heiße $K \in D_\sigma$ eine *obere (untere) Schranke von* M, falls gilt: $\alpha \in M \to \alpha \leqq K$ $(K \leqq \alpha)$. Es gibt zu jeder Menge $M \subseteq D_\sigma$ höchstens eine kleinste obere Schranke und höchstens eine größte untere Schranke.

Satz 30. *Jede Menge $M \subseteq D_\sigma$ besitzt eine kleinste obere Schranke $\bar{G} \in D_\sigma$ und eine größte untere Schranke $\underline{G} \in D_\sigma$.*

Beweis. a) Man bilde den DEDEKINDschen Schnitt $[A, B]$ in D_σ: $A = D_\sigma \setminus B$; $y \in B \leftrightarrow y$ obere Schranke von M. Für das Schnittelement α gilt dann: $x \in A \rightarrow x \leqq \alpha$, $y \in B \rightarrow \alpha \leqq y$. Es ist α eine obere Schranke von M: Ist nämlich $\mu \in M$ und $\alpha < \mu$, so gibt es ein $b \in D_\sigma$ mit $\alpha < b < \mu$; es wäre dann $b \in B$ im Widerspruch zu $b < \mu$ und $\mu \in M$. α ist auch die kleinste obere Schranke von M: Jedes kleinere Element $\alpha' < \alpha$ ist ja in A gelegen, also keine obere Schranke von M. b) Man bilde den DEDEKINDschen Schnitt $[A, B]$ in D_σ: $B = D_\sigma \setminus A$; $x \in A \leftrightarrow x$ untere Schranke von M. Analog zu a) zeigt man, daß das Schnittelement α die größte untere Schranke von M ist.

Jede Menge $M \subseteq D_\sigma$ (und damit auch jede Menge $M \subseteq C_\sigma$) besitzt also eine eindeutig bestimmte *obere Grenze* $\bar{G}$ (kleinste obere Schranke) und eine eindeutig bestimmte *untere Grenze* $\underline{G}$ (größte untere Schranke). Ist $\bar{G} \in M$ bzw. $\underline{G} \in M$, so heißt $\bar{G}$ *Maximum* bzw. $\underline{G}$ *Minimum* von M. Für $M = \varnothing$ ist $\bar{G} = -\infty_\sigma$, $\underline{G} = +\infty_\sigma$; für $M = D_\sigma$ und ebenso für $M = C_\sigma$ ist $\bar{G} = +\infty_\sigma$, $\underline{G} = -\infty_\sigma$. Für $\mu \in M \subseteq D_\sigma$ ist stets $\underline{G} \leqq \mu \leqq \bar{G}$; also ist $\underline{G} \leqq \bar{G}$, falls $M \neq \varnothing$. Ist $M \subseteq D_\sigma$ und $\underline{G} < g_1 \in D_\sigma$ bzw. $D_\sigma \ni g_2 < \bar{G}$, so gibt es Elemente μ_1 bzw. μ_2 aus M mit $\underline{G} \leqq \mu_1 < g_1$ bzw. $g_2 < \mu \leqq \bar{G}$.

9. Für $\alpha \in C_\sigma$ und (endlich-)ganzzahlige $n \in G_0$ definiere man die *Potenz* α^n folgendermaßen:

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha \quad \text{für} \quad n \in N_0,$$

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} \qquad \text{für} \quad n \in N_0 \text{ und } \alpha \neq 0.$$

Dann gilt für $m, n \in G_0$ und $\alpha, \beta \in C_\sigma$ mit $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \qquad \alpha^m \cdot \beta^m = (\alpha \cdot \beta)^m, \qquad (\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n}.$$

Daraus folgt für $m, n \in G_0$ und $\alpha, \beta \in C_\sigma$ mit $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$:

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}, \qquad \frac{\alpha^m}{\beta^m} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m.$$

Für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $m \in N_0$, $m > 0$ gilt

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha^m < \beta^m,$$

$$\alpha = \beta \leftrightarrow \alpha^m = \beta^m,$$

$$\alpha > \beta \leftrightarrow \alpha^m > \beta^m.$$

Für $\alpha > 0$ und $m \in G_0$ gilt

$$\alpha < 1 \leftrightarrow \alpha^{m+1} < \alpha^m,$$

$$\alpha = 1 \leftrightarrow \alpha^{m+1} = \alpha^m,$$

$$\alpha > 1 \leftrightarrow \alpha^{m+1} > \alpha^m.$$

Ist $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha \geqq 0$, $n \in N_0$, $n > 0$, so gibt es höchstens ein $\beta \in C_\sigma$, $\beta \geqq 0$ mit $\beta^n = \alpha$; denn aus ${\beta_1}^n = {\beta_2}^n = \alpha$ folgt $\beta_1 = \beta_2$. Für $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha \geqq 0$ und $n \in N_0$, $n > 0$ sei $\sqrt[n]{\alpha}$ diejenige reelle Ordinalzahl $\beta \in C_\sigma$, $\beta \geqq 0$ mit $\beta^n = \alpha$. $\sqrt[n]{\alpha}$ existiert nicht immer:

Satz 31. *Zu keinem $n \in N_0$, $n > 1$ gibt es ein $\beta \in C_\sigma$, $\beta \geqq 0$ mit $\beta^n = \omega$.*

Beweis. Ist $m \in N_0$ und $\beta \in C_\sigma$, $\beta \geqq 0$ und $\beta \leqq m$, so ist $\beta^n \leqq m^n < \omega$. Ist $\beta \in C_\sigma$, $\beta \geqq 0$ und gilt für jedes $m \in N_0$: $m < \beta$, so ist $\beta^n > \omega$; dazu genügt es zu zeigen, daß für jedes rationale $r \in R_\sigma$ mit $r \geqq 0$ gilt: Wenn $r > m$ für jedes $m \in N_0$, so ist $r^n > \omega$. Dies folgt so: Es ist $r = \frac{g}{h}$ bei $g, h \in G_\sigma$ und $g > 0$, $h > 0$. Die Cantorschen Normalformen von g und h seien: $g = \sum_{i \leqq k} \omega^{\alpha_i} a_i$, $h = \sum_{i \leqq l} \omega^{\beta_i} b_i$; es ist $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Ist $\alpha_0 < \beta_0$, so ist $g < h$, also $r = \frac{g}{h} < 1$ im Widerspruch zu $r > m$ für jedes $m \in N_0$. Ist $\alpha_0 = \beta_0$, so kann man ein $m \in N_0$ so wählen, daß $m \cdot h > g$ wird, also $r = \frac{g}{h} < m$, Widerspruch. Also muß $\beta_0 < \alpha_0$ sein. Dann ist aber für jedes $n \in N_0$, $n > 1$: $\beta_0 \cdot n + 1 < \alpha_0 \cdot n$; also $h^n \cdot \omega < g^n$, also $r^n = \frac{g^n}{h^n} > \omega$.

Es existiert dann auch z. B. $\sqrt[n]{\frac{1}{\omega}}$ nicht, denn für $\beta = \sqrt[n]{\frac{1}{\omega}}$ wäre ja $\left(\frac{1}{\beta}\right)^n = \omega$; Widerspruch zu Satz 31. Ist $n \in N_0$, $n > 0$, so ist $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$; existiert $\sqrt[n]{\alpha}$ für $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha > 0$, so auch $\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}}$ und umgekehrt. Die Existenzfrage für $\sqrt[n]{\alpha}$ bei $\alpha \geqq 0$ ist also geklärt durch Beantwortung dieser Frage für $\sqrt[n]{\alpha}$ bei $\alpha > 1$, $n > 1$ (Fall $n = 1$ trivial: $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$). Es gilt der

Satz 32. *Bildet man für $\alpha \in C_\sigma$, $\alpha > 1$ und $n \in N_0$, $n > 1$ den* Dedekindschen *Schnitt $[A, B]$ in C_σ mit*

$$a \in A \leftrightarrow a \leqq 0 \vee (a > 0 \wedge a^n < \alpha),$$

$$b \in B \leftrightarrow b > 0 \wedge b^n \geqq \alpha$$

und erfüllt $[A, B]$ in C_σ die Hölder*-Bedingung, so gilt für die Schnittzahl $\eta \in C_\sigma$ von $[A, B]$: $\eta > 0$ und $\eta^n = \alpha$ (d. h. $\eta = \sqrt[n]{\alpha}$).*

Beweis. Indem $[A, B]$ die Hölder-Bedingung erfüllt, ist die Schnittzahl η in C_σ gelegen; dann kann der Beweis wie im klassischen endlichen Fall geführt werden.

Da der in Satz 32 angegebene Schnitt im Fall $\sigma = 0$ stets die Hölder-Bedingung erfüllt, existiert in C_0 für $\alpha \geqq 0$, $n \in N_0$, $n > 0$ stets $\sqrt[n]{\alpha}$. Man kann Satz 32 noch dahingehend ergänzen, daß $\sqrt[n]{\alpha}$ genau dann existiert, wenn $[A, B]$ die Hölder-Bedingung erfüllt; erfüllt nämlich $[A, B]$ nicht die Hölder-Bedingung,

so besitzt B kein kleinstes Element, also kann für $b \in B$ nie $b^n = \alpha$ gelten, also stets $b^n > \alpha$. Dann gilt also für alle $x \in C_\sigma$: $x^n < \alpha \vee x^n > \alpha$.

10. Die reellen Ordinalzahlen aus C_σ bilden einen geordneten (kommutativen) Körper. Darüber hinaus gelten noch die folgenden Axiome:

Axiome der Limeselemente.

(1) *Alle natürlichen Limeszahlen aus N_σ sind reelle Ordinalzahlen aus C_σ.*

(2) *Sind λ_1, λ_2 natürliche Limeszahlen aus N_σ, so auch $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.*

(3) *Sind λ, μ natürliche Limeszahlen aus N_σ und ist $\lambda < \mu$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n: $\lambda + n < \mu$.*

Der Beweis verläuft wie früher im ganzzahligen Bereich.

Vollständigkeitsaxiom.

Jede reelle Fundamentalfolge aus C_σ konvergiert gegen einen Grenzwert aus C_σ.

Approximationsaxiom.

Jede reelle Ordinalzahl aus C_σ ist der Grenzwert einer Folge (r_n) vom Typ ω_σ rationaler Ordinalzahlen $r_n \in R_\sigma$.

Da jede rationale Ordinalzahl aus R_σ der Quotient ganzer Ordinalzahlen aus G_σ ist, jede ganze Ordinalzahl aus G_σ die Differenz natürlicher Ordinalzahlen aus N_σ und jede natürliche Ordinalzahl $m \in N_\sigma$ sich darstellen läßt als $m = \lambda + n$, wo λ eine natürliche Limeszahl aus N_σ und n eine natürliche Zahl ist, so läßt sich das Approximationsaxiom auch so formulieren: *Jede reelle Ordinalzahl aus C_σ ist der Grenzwert einer Folge (r_n) vom Typ ω_σ mit* $r_n = \dfrac{(\lambda_1 - \lambda_2) + g}{(\mu_1 - \mu_2) + h}$, *wobei — in Abhängigkeit von n — die λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 natürliche Limeszahlen aus N_σ und die g, h ganze Zahlen sind.*

Archimedisches Axiom.

Zu reellen Ordinalzahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ aus C_σ gibt es eine natürliche Ordinalzahl $n \in N_\sigma$ mit $\beta \cdot n > \alpha$.

Beweis. Es seien r, s rationale Ordinalzahlen aus R_σ mit $\alpha \leqq r$ und $0 < s \leqq \beta$; dann gibt es nach dem Archimedischen Axiom im rationalen Fall ein $n \in N_\sigma$ mit $s \cdot n > r$; wegen $n > 0$ hat man dann schließlich: $\beta \cdot n \geqq s \cdot n > r \geqq \alpha$.

Da sich jede natürliche Ordinalzahl $m \in N_\sigma$ darstellen läßt als $m = \lambda + n$, wo λ eine natürliche Limeszahl aus N_σ und n eine natürliche Zahl ist, läßt sich das Archimedische Axiom auch so aussprechen: *Zu reellen Ordinalzahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ aus C_σ gibt es eine natürliche Limeszahl $\lambda \in N_\sigma$ und eine natürliche Zahl n mit $\beta \cdot (\lambda + n) > \alpha$.*

Für C_0 sind Vollständigkeitsaxiom und Archimedisches Axiom die üblichen Axiome der Vollständigkeit und des ARCHIMEDES; für C_0 sind außerdem Archimedisches Axiom und Approximationsaxiom äquivalent. Die C_σ mit $\sigma > 0$ sind weitere Beispiele nicht im klassischen Sinne archimedisch geordneter Körper.

Die reellen Ordinalzahlen aus C_σ sind nun als transfiniter stetiger Körper vom Typ ω_σ bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert, was folgendes bedeutet:

Wir definieren zunächst: Das 7-Tupel $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ heiße ein *transfiniter stetiger Körper vom Typ ω_σ* genau dann, wenn gilt: $[M, +, \cdot, <, 0, 1]$ ist ein

geordneter (kommutativer) Körper, Λ ist eine Folge $(\Lambda_\xi)_{\xi<T}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern vom Typ T, wobei $T=1$ für $\sigma=0$ und $T=\omega_\sigma$ für $\sigma>0$ (ω_σ reguläre Anfangszahl); es gelten noch die Axiome:

I. Axiome der Limeselemente.

(1) $\Lambda_\xi \in M$ für $\xi<T$; $\Lambda_0=0$.

(2) $\Lambda_\xi<\Lambda_\eta \leftrightarrow \xi<\eta$.

(3) Λ ist gegenüber $+,\cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften
$\Lambda_\xi+\Lambda_\eta=\Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi+\eta=\zeta$, $\quad \Lambda_\xi\cdot\Lambda_\eta=\Lambda_\zeta \leftrightarrow \xi\cdot\eta=\zeta$.

(4) Ist $\Lambda_\xi<\Lambda_\eta$, so gilt für alle $n\in N_0$: $\Lambda_\xi+n\cdot 1<\Lambda_\eta$, wobei $n\cdot 1$ die n-malige Addition von 1 bedeute.

II. Stetigkeitsaxiom.

(1) Vollständigkeitsaxiom: Jede Fundamentalfolge konvergiert gegen einen Grenzwert, d. h.:

Voraussetzung. (a_n) ist eine Folge vom Typ ω_σ von Elementen $a_n\in M$. Für jedes $\varepsilon\in M$, $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in N_\sigma$ mit $|a_n-a_m|<\varepsilon$ für $n,m\in N_\sigma$ und $n,m\geqq N$.

Behauptung. Es gibt ein $a\in M$ mit: Für jedes $\varepsilon\in M$, $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in N_\sigma$ mit $|a_n-a|<\varepsilon$ für $n\in N_\sigma$ und $n\geqq N$.

(2) Approximationsaxiom: Zu jedem $a\in M$ gibt es eine Folge (r_n) vom Typ ω_σ von Elementen $r_n\in M$ mit:

a) Für jedes r_n gibt es Limeselemente Λ_ξ, $\Lambda_{\bar\xi}$, Λ_η, $\Lambda_{\bar\eta}$ und ganze Zahlen $g,h\in G_0$ mit $r_n=\dfrac{(\Lambda_\xi-\Lambda_{\bar\xi})+g\cdot 1}{(\Lambda_\eta-\Lambda_{\bar\eta})+h\cdot 1}$, wobei $g\cdot 1$ bzw. $h\cdot 1$ die g-malige bzw. h-malige Addition von 1 bedeute.

b) $a=\lim r_n$, d. h. für jedes $\varepsilon\in M$, $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in N_\sigma$ mit $|r_n-a|<\varepsilon$ für $n\in N_\sigma$ und $n\geqq N$.

Ist $[M,\Lambda,+,\cdot,<,0,1]$ ein transfiniter stetiger Körper vom Typ ω_σ, so existiert die kleinste Menge R_M aller Mengen M^* mit den Eigenschaften $\Lambda_\xi\in M^*$, $1\in M^*$, $x,y\in M\cap M^*\to(x+y),(x\cdot y)\in M^*$, $x\in M\cap M^*\wedge x\neq 0\to(-x),x^{-1}\in M^*$; denn solch eine Menge M^* ist M und der Durchschnitt D aller solcher Mengen M^*; es ist dann $R_M=D\subseteq M$.

Satz 33. *Ist* $[M,\Lambda,+,\cdot,<,0,1]$ *ein transfiniter stetiger Körper vom Typ* ω_σ, *so ist* $[R_M,\Lambda,+,\cdot,<,0,1]$ ($+,\cdot,<$ *seien hier die auf* R_M *eingeschränkten* $+,\cdot,<$ *von* M) *ein transfiniter minimaler geordneter Körper vom Typ* ω_σ, *und jedes* $a\in M$ *ist Grenzwert einer Folge* (r_n) *vom Typ* ω_σ *von Elementen* $r_n\in R_M$ (*d. h., zu jedem* $a\in M$ *gibt es eine Folge* (r_n) *vom Typ* ω_σ *von Elementen* $r_n\in R_M$ *mit: Für jedes* $\varepsilon\in M$, $\varepsilon>0$ *gibt es ein* $N\in N_\sigma$ *mit* $|r_n-a|<\varepsilon$ *für* $n\in N_\sigma$, $n\geqq N$).

Beweis. $[R_M,+,\cdot,<,0,1]$ ist trivial ein geordneter Körper; es gelten auch sofort die Axiome der Limeselemente bezüglich $(\Lambda_\xi)_{\xi<T}$. Nun zum Minimalaxiom. Es wird behauptet, daß $R_M\subseteq M^*$ für jede Menge M^* gilt mit: $\Lambda_\xi\in M^*$, $1\in M^*$, $x,y\in R_M\cap M^*\to(x+y),(x\cdot y)\in M^*$, $x\in R_M\cap M^*\wedge x\neq 0\to(-x),x^{-1}\in M^*$. Zum Beweis sei M^{**} die Menge aller $x\in R_M\cap M^*$; es ist zu zeigen $R_M\subseteq M^{**}$, also: $\Lambda_\xi\in M^{**}$, $1\in M^{**}$, $x,y\in M\cap M^{**}\to(x+y),(x\cdot y)\in M^{**}$, $x\in M\cap M^{**}\wedge x\neq 0\to(-x),x^{-1}\in M^{**}$. Dies folgt so: $\Lambda_\xi\in M^{**}$ und $1\in M^{**}$ ist trivial. Wenn

$x, y \in M \cap M^{**}$, so auch $x, y \in R_M \cap M^*$, also $(x + y), (x \cdot y) \in M^*$, also $(x + y), (x \cdot y) \in R_M \cap M^* = M^{**}$. Wenn $x \in M \cap M^{**} \wedge x \neq 0$, so $x \in R_M \cap M^* \wedge x \neq 0$, also $(-x), x^{-1} \in M^*$, also auch $(-x), x^{-1} \in R_M \cap M^* = M^{**}$. Es ist also insgesamt $[R_M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ ein transfiniter minimaler geordneter Körper vom Typ ω_σ. Die Approximierbarkeit der Elemente $a \in M$ durch Folgen (r_n) vom Typ ω_σ von Elementen $r_n \in R_M$ folgt sofort aus dem Approximationsaxiom.

Satz 34. *In jedem transfiniten stetigen Körper* $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ *vom Typ* ω_σ *gilt das (transfinite) Archimedische Axiom; d. h., zu Elementen* $a, b \in M$ *mit* $a > 0$, $b > 0$ *gibt es ein* Λ_ξ *und ein* $n \in N_0$ *mit* $b\,(\Lambda_\xi + n \cdot 1) > a$, *wobei* $n \cdot 1$ *die n-malige Addition von* 1 *bedeute.*

Beweis. Es sei $a = \lim r_n, b = \lim s_n$ mit $r_n, s_n \in R_M$. Dann ist etwa $|r_n - a| < 1$ für $n \geqq N$ und $|s_n - b| < \frac{b}{2}$ für $n \geqq N$, also $a \leqq r_N + 1 \in R_M$ und $0 < \frac{s_N}{2} \leqq b$ mit $\frac{s_N}{2} \in R_M$ (denn für $s_N \leqq b$ gilt trivial $0 < \frac{s_N}{2} \leqq b$; für $b \leqq s_N$ ist aber $s_N - b < \frac{b}{2} \leqq \frac{s_N}{2}$, also $0 < s_N - \frac{s_N}{2} \leqq b$, also $0 < \frac{s_N}{2} \leqq b$). Es gibt also Elemente $r, s \in R_M$ mit $a \leqq r$, $0 < s \leqq b$. Da in R_M das Archimedische Axiom gilt, gibt es also ein Λ_ξ und ein $n \in N_0$ mit $b \cdot \Lambda_\xi + b \cdot n \geqq s \cdot \Lambda_\xi + s \cdot n > r \geqq a$.

Für transfinite stetige Körper vom Typ ω_0 sind Approximationsaxiom und Archimedisches Axiom äquivalent.

Satz 35. *Es sei* $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ *ein transfiniter stetiger Körper vom Typ* ω_σ *und* (x_n) *eine Folge vom Typ* ω_σ *von Elementen* $x_n \in M$. *Dann konvergiert* (x_n) *in M genau dann, wenn* (x_n) *eine Fundamentalfolge in M ist. Ist zusätzlich* $x_n \in R_M$, *so ist* (x_n) *eine Fundamentalfolge in M genau dann, wenn* (x_n) *eine Fundamentalfolge in* R_M *ist.*

Beweis. Wenn (x_n) konvergiert, so gibt es ein $x \in M$ mit: Zu jedem $\varepsilon \in M$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für $n \in N_\sigma$, $n \geqq N$; dann gilt also $|x_n - x_m| < 2\varepsilon$ für $n, m \geqq N$, also (x_n) Fundamentalfolge in M. Das Umgekehrte ist gerade das Vollständigkeitsaxiom. Ist jetzt $x_n \in R_M$ und $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geqq N$ bei $\varepsilon \in M$, $\varepsilon > 0$, so gilt auch $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geqq N$ bei $\varepsilon \in R_M$, $\varepsilon > 0$. Ist umgekehrt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geqq N$ bei $\varepsilon \in R_M$, $\varepsilon > 0$, so auch bei $\varepsilon \in M$, $\varepsilon > 0$; denn zu jedem $\varepsilon \in M$, $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 34 ein Λ_ξ und ein $n \in N_0$ mit $1 < \varepsilon\,(\Lambda_\xi + n \cdot 1)$ oder $\frac{1}{\Lambda_\xi + n \cdot 1} < \varepsilon$; es ist aber $\frac{1}{\Lambda_\xi + n \cdot 1} \in R_M$, also gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $|x_n - x_m| < \frac{1}{\Lambda_\xi + n \cdot 1} < \varepsilon$ für $n, m \geqq N$.

Satz 36 (Isomorphiesatz). *Sind* $[M_1, \Lambda_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\cdot}, \underset{1}{<}, 0, 1]$ *und* $[M_2, \Lambda_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\cdot}, \underset{2}{<}, 0, 1]$ *transfinite stetige Körper vom Typ* ω_σ, *so sind diese Körper isomorph, d. h., es gibt eine eineindeutige Abbildung* φ *von* M_1 *auf* M_2 *mit*

$$\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi} \quad \text{für} \quad \xi < T, \quad \varphi(1) = 1, \quad x \underset{1}{<} y \to \varphi(x) \underset{2}{<} \varphi(y),$$
$$\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y), \quad \varphi(x \underset{1}{\cdot} y) = \varphi(x) \underset{2}{\cdot} \varphi(y).$$

Beweis. Nach dem Isomorphiesatz für transfinite minimale geordnete Körper vom Typ ω_σ (Satz 18 aus § 3) gibt es eine eineindeutige Abbildung ψ von R_{M_1} auf R_{M_2} mit $\psi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi}$, $\psi(1) = 1$, $x < y \to \psi(x) < \psi(y)$, $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$, $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$. Jedes $x \in M_1$ ist Grenzwert einer Folge (x_n) vom Typ ω_σ von Elementen $x_n \in R_{M_1}$; (x_n) ist also Fundamentalfolge in M_1 und dann also auch in R_{M_1}: Zu jedem $\varepsilon \in R_{M_1}$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geqq N$; dann ist auch $\psi(|x_n - x_m|) < \psi(\varepsilon)$ für $n, m \geqq N$ oder

$$|\psi(x_n) - \psi(x_m)| < \psi(\varepsilon)$$

für $n, m \geqq N$. Es gibt also zu jedem $\eta \in R_{M_2}$, $\eta > 0$ — es sei etwa $\eta = \psi(\varepsilon)$ — ein N mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geqq N$ und damit $|\psi(x_n) - \psi(x_m)| < \psi(\varepsilon) = \eta$ für $n, m \geqq N$. $(\psi(x_n))$ ist also Fundamentalfolge in R_{M_2} und damit in M_2. Es gibt schließlich ein $y \in M_2$, gegen welches $(\psi(x_n))$ konvergiert; man setze $\varphi(x) = y$. Diese Definition von φ ist sinnvoll, d. h. unabhängig von der speziellen Wahl der approximierenden Folge (x_n). Ist nämlich $x = \lim x_n = \lim x_n'$ mit $x_n, x_n' \in R_{M_1}$, so ist $0 = \lim (x_n - x_n')$ und damit $0 = \psi(0) = \lim (\psi(x_n) - \psi(x_n'))$, also $\lim \psi(x_n) = \lim \psi(x_n')$. φ ist auch eine Funktion von M_1 auf M_2, da ψ eine Funktion von R_{M_1} auf R_{M_2} ist. φ ist auch umkehrbar eindeutig; denn wenn $x = \lim x_n$ und $y = \lim y_n$ und $\varphi(x) = \varphi(y)$, so ist doch $\lim \psi(x_n) = \lim \psi(y_n)$, also

$$0 = \lim (\psi(x_n) - \psi(y_n)),$$

also $0 = \lim (x_n - y_n)$, also $\lim x_n = \lim y_n$, also $x = y$. Es ist weiterhin $\Lambda_{1\xi} = \lim x_n$ mit $x_n = \Lambda_{1\xi}$, also $\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \lim \psi(x_n) = \lim y_n$ mit $y_n = \Lambda_{2\xi}$, also $\varphi(\Lambda_{1\xi}) = \Lambda_{2\xi}$. Ebenso ist $\varphi(1) = 1$. Ist $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ mit $x_n, y_n \in R_{M_1}$ und $x < y$, so gibt es ein $N \in N_\sigma$ mit $x_n < y_n$ für $n \geqq N$; also ist auch $\psi(x_n) < \psi(y_n)$ für $n \geqq N$, also $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$; wegen $x \neq y$ ist aber auch $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, also $\varphi(x) < \varphi(y)$. Ist $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ mit $x_n, y_n \in R_{M_1}$, so ist

$$\varphi(x + y) = \lim \psi(x_n + y_n) = \lim [\psi(x_n) + \psi(y_n)] = \lim \psi(x_n) + \lim \psi(y_n) = \\ = \varphi(x) + \varphi(y);$$

ebenso ist

$$\varphi(x \cdot y) = \lim \psi(x_n \cdot y_n) = \lim [\psi(x_n) \cdot \psi(y_n)] = \lim \psi(x_n) \cdot \lim \psi(y_n) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Aus der Konstruktion des R_M eines transfiniten stetigen Körpers $[M, \Lambda, +, \cdot, <, 0, 1]$ vom Typ ω_σ und Satz 36 folgt, daß es zwischen zwei transfiniten stetigen Körpern vom Typ ω_σ sogar genau eine isomorphe Abbildung gibt. (Man zeigt, daß isomorphe Abbildungen φ_1 und φ_2 zunächst auf R_{M_1} übereinstimmen und geht dann zum Grenzwert über, wobei man berücksichtigt, daß jedes $x \in M_1$ der Grenzwert einer Folge (r_n) mit $r_n \in R_{M_1}$ ist.) Für die Durchführbarkeit des obigen

Isomorphiebeweises genügt es wiederum, in der Definition der transfiniten stetigen Körper vom Typ ω_σ statt I(2) und I(3) zu fordern:

I(2*) $\Lambda_\xi < \Lambda_\eta \leftrightarrow \xi S \eta$.

I(3*) Λ ist gegenüber $+, \cdot$ abgeschlossen mit den Eigenschaften

$$\Lambda_\xi + \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow F_1(\xi, \eta) = \zeta, \quad \Lambda_\xi \cdot \Lambda_\eta = \Lambda_\zeta \leftrightarrow F_2(\xi, \eta) = \zeta.$$

Dabei ist S eine von vornherein unabhängig von den einzelnen Körpern vorgegebene binäre Relation in N_σ, und F_1, F_2 sind ebensolche unabhängigen eindeutigen Abbildungen der Menge aller Paare $[\xi, \eta]$ mit $\xi, \eta \in N_\sigma$ in N_σ.

In jedem transfiniten stetigen Körper vom Typ ω_σ (mit den ursprünglichen spezialisierten S, F_1, F_2) gilt — wie wir schon sahen — das (transfinite) Archimedische Axiom (Satz 34). Auf Grund des Isomorphiesatzes gelten auch die Axiome vom Schnitt und der Intervallschachtelung:

Axiom vom Schnitt. $[A, B]$ *heiße Schnitt in* M, *falls* $A \subseteq M$, $B \subseteq M$, $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$, $a \in A \wedge b \in B \to a < b$; *zu jedem* $\delta \in M$, $\delta > 0$ *gibt es Elemente* $a \in A$, $b \in B$ mit $b - a = \delta$. *Dann gibt es zu jedem Schnitt* $[A, B]$ *in* M *ein Schnittelement* $\alpha \in M$ *mit* $x \in A \to x \leqq \alpha$, $y \in B \to \alpha \leqq y$.

Axiom der Intervallschachtelung. $[\varrho_n, \sigma_n]$ *heiße Intervallschachtelung in* M, *falls* (ϱ_n), (σ_n) *Folgen vom Typ* ω_σ *von Elementen* $\varrho_n, \sigma_n \in M$ *sind mit*

$$n_1 < n_2 \to \varrho_{n_1} \leqq \varrho_{n_2} \wedge \sigma_{n_2} \leqq \sigma_{n_1},$$

$$\varrho_n \leqq \sigma_n,$$

$$\varepsilon \in M \wedge \varepsilon > 0 \to \exists N \forall n (n \geqq N \to |\varrho_n - \sigma_n| < \varepsilon).$$

Dann gibt es zu jeder Intervallschachtelung $[\varrho_n, \sigma_n]$ *in* M *ein erfaßtes Element* $\alpha \in M$ *mit* $\varrho_n \leqq \alpha \leqq \sigma_n$.

Über dem Körper der reellen Ordinalzahlen aus C_σ kann man wie im klassischen Fall durch Paarbildung den Körper der komplexen Ordinalzahlen konstruieren. Wir gehen nicht darauf ein, da uns in erster Linie die eingeführten reellen Strukturen interessieren sollen, die wir im folgenden näher auf ihre topologischen Eigenschaften untersuchen wollen.

KAPITEL II

LINEARE PUNKTMENGEN

§ 5 Häufungspunkte

1. Unsere Betrachtungen verlaufen von nun an vorwiegend in C_σ. Der in C_σ zugrunde gelegte Folgenbegriff ist der Begriff der *Folge vom Typ* ω_σ. Wir wissen: Eine Menge $M \subseteq C_\sigma$ heißt *beschränkt*, falls es ein positives $K \in C_\sigma$ gibt mit $a \in M \to |a| < K$ bzw. $a \in M \to -K < a < K$. M ist beschränkt genau dann, wenn es eine obere Schranke K von M und eine untere Schranke K von M gibt, wobei K, $K \in C_\sigma$. $K \in D_\sigma$ war dabei eine *obere* bzw. *untere Schranke* von M, falls $a \in M \to a \leqq K$ gilt bzw. $a \in M \to K \leqq a$. Jede Menge $M \subseteq C_\sigma$ besitzt eine eindeutig bestimmte obere Grenze $G \in D_\sigma$ und eine eindeutig bestimmte untere Grenze $\underline{G} \in D_\sigma$. Dabei war die *obere Grenze* die kleinste obere Schranke und die *untere Grenze* die größte untere Schranke. Jede Menge $M \subseteq C_\sigma$ mit $\bar{M} < \|\omega_\sigma\|$ ist beschränkt.

Eine Folge (x_n) hieß *Fundamentalfolge in* C_σ ($x_n \in C_\sigma$, $n \in N_\sigma$), falls es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $|x_n - x_{n^*}| < \varepsilon$ für n, $n^* \in N_\sigma$ und n, $n^* \geqq N$. Jede Fundamentalfolge ist beschränkt. Eine Folge (x_n) ($x_n \in C_\sigma$, $n \in N_\sigma$) *konvergiert gegen* $a \in C_\sigma$, falls es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für $n \in N_\sigma$ und $n \geqq N$. (x_n) *konvergiert*, falls (x_n) gegen ein $a \in C_\sigma$ konvergiert. Jede konvergente Folge (x_n) besitzt genau einen *Grenzwert* $a = \lim x_n$ (gegen den sie konvergiert), und jede Teilfolge von (x_n) konvergiert ebenfalls gegen a. (x_n) ist Fundamentalfolge genau dann, wenn (x_n) konvergiert.

Für konvergente Folgen gelten die üblichen *Grenzwertsätze*: *Konvergieren* (x_n) *und* (y_n), *so konvergieren auch* $(x_n + y_n)$ *und* $(x_n \cdot y_n)$, *und es ist*

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$$

und

$$\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n .$$

Konvergiert (x_n), *so auch* $(-x_n)$ *mit*

$$\lim (-x_n) = -\lim x_n .$$

Konvergiert (x_n) *bei* $x_n \neq 0$ *und* $\lim x_n \neq 0$, *so auch* $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ *mit*

$$\lim \left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\lim x_n} .$$

Die Beweise verlaufen wie im klassischen Fall, wobei man für den Grenzwertsatz des Quotienten den folgenden Hilfssatz benötigt:

Hilfssatz. *Ist* $x = \lim x_n$ *mit* $x_n \neq 0$, $x \neq 0$, *so gibt es ein* $0 < K \in C_\sigma$ *mit* $K \leqq |x_n|$ *für alle* $n \in N_\sigma$.

Beweis. Es sei $|x - x_n| < \frac{|x|}{2}$ für $n \geqq N$; dann ist also für $n \geqq N$: $\frac{|x|}{2} < |x_n|$. Ist $N = 0$, so sind wir fertig. Bei $N > 0$ gilt aber: Die untere Grenze G der Menge aller $|x_n|$ mit $n < N$ ist positiv. Wäre nämlich $G = 0$, so gäbe es für jedes $\varepsilon > 0$ ein x_{n_ε} $(n_\varepsilon < N)$ mit $0 < |x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$; dann gäbe es aber mindestens $\|\omega_\sigma\|$ viele x_n mit $n < N$, Widerspruch. Es gibt also ein $0 < K' < G$ mit $K' \in C_\sigma$ und damit $K' < |x_n|$ für $n < N$. Für $K = \min\left(\frac{|x|}{2}, K'\right)$ gilt dann insgesamt: $K < |x_n|$ für alle $n \in N_\sigma$.

Wir definieren die *Intervalle* folgendermaßen: Für $x, y \in D_\sigma$, $x < y$ sei

$$\langle x, y\rangle \text{ die Menge aller } z \in C_\sigma \text{ mit } x \leqq z \leqq y,$$

$$(x, y) \text{ die Menge aller } z \in C_\sigma \text{ mit } x < z < y,$$

$$\langle x, y) \text{ die Menge aller } z \in C_\sigma \text{ mit } x \leqq z < y,$$

$$(x, y\rangle \text{ die Menge aller } z \in C_\sigma \text{ mit } x < z \leqq y.$$

Die *Entfernung* $\varrho(x, y)$ von $x, y \in C_\sigma$ sei definiert als $\varrho(x, y) = |x - y|$. Es ist dann $\varrho(x, y) \geqq 0$, $\varrho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$, $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ und

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z).$$

Die ε-*Umgebung* $U(a, \varepsilon)$ von $a \in C_\sigma$ $(\varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0)$ sei die Menge aller $x \in C_\sigma$ mit $\varrho(a, x) < \varepsilon$. Aus dieser Umgebungsdefinition folgt sofort: *Eine Folge* (x_n) *konvergiert genau dann gegen* $a \in C_\sigma$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in N_\sigma$ *gibt mit* $x_n \in U(a, \varepsilon)$ *für* $n \in N_\sigma$ *und* $n \geqq N$.

2. $a \in C_\sigma$ heiße *Berührungspunkt* von $M \subseteq C_\sigma$, falls für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gilt: $M \cap U(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. Die *abgeschlossene Hülle* bzw. *Abschließung* $\boldsymbol{H}M$ von M sei die Menge aller Berührungspunkte von M. Es ist trivial, $M \subseteq \boldsymbol{H}M$. Ist a Berührungspunkt von M, so gibt es zwei Fälle:

(1) Für jede Umgebung $U(a, \varepsilon)$ ist $\overline{\overline{M \cap U(a, \varepsilon)}} \geqq \|\omega_\sigma\|$; dann heißt a *Häufungspunkt* von M.

(2) Es gibt eine Umgebung $U(a, \varepsilon)$ mit $\overline{\overline{M \cap U(a, \varepsilon)}} < \|\omega_\sigma\|$; dann heißt a *isolierter Punkt* von M.

Satz 1. *a ist isolierter Punkt von M genau dann, wenn $a \in M$ und es eine Umgebung $U(a, \varepsilon)$ gibt mit $M \cap (U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) = \emptyset$. a ist Häufungspunkt von M genau dann, wenn für jede Umgebung $U(a, \varepsilon)$ gilt: $M \cap (U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wenn $a \in M$ und es ein $U(a, \varepsilon)$ gibt mit $M \cap U(a, \varepsilon) = \{a\}$, so ist trivial a isolierter Punkt von M; denn $M \subseteq \boldsymbol{H}M$ und $\overline{\overline{\{a\}}} = 1 < \|\omega_\sigma\|$. Die Umkehrung folgt aus Satz 2. Wenn a Häufungspunkt von M ist, so gilt trivial für jede Umgebung $U(a, \varepsilon)$: $M \cap (U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$; denn $\overline{\overline{M \cap U(a, \varepsilon)}} \geqq \|\omega_\sigma\| > 1$. Die Umkehrung folgt aus Satz 2.

Satz 2. *Wenn* $a \in C_\sigma$, $M \subseteq C_\sigma$ *und für jede Umgebung* $U(a, \varepsilon)$ *gilt*

$$M \cap (U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset,$$

dann ist $\overline{M \cap U(a, \varepsilon)} \geqq \|\omega_\sigma\|$ *für jede Umgebung* $U(a, \varepsilon)$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt

$$n \in N_\sigma \to \exists \varrho \left(\varrho \in M \wedge \varrho \neq a \wedge \varrho \in U\left(a, \frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Für $n \in N_\sigma$ sei A_n der durch n bestimmte Abschnitt von N_σ. Dann definieren wir mit transfiniter Induktion über N_σ die Folge $F(n)$ natürlicher Ordinalzahlen aus N_σ: Ist $F(x)$ für $x \in A_n$ erklärt, so sei — „μ_m" bedeute „das kleinste m" —

$$F(n) = \mu_m \left\{ m \in N_\sigma \wedge \exists \varrho \left(\varrho \in M \wedge \varrho \neq a \wedge \varrho \notin U\left(a, \frac{1}{n+1}\right) \wedge \right.\right.$$

$$\left.\left. \wedge \forall x \left(x \in A_n \to \varrho \in U\left(a, \frac{1}{F(x)+1}\right)\right)\right)\right\}.$$

Aus der Rekursionsgleichung für $F(n)$ ergibt sich unmittelbar: (1) Für jedes $n \in N_\sigma$ gibt es ein $\varrho \in M$, $\varrho \neq a$ mit

$$\varrho \notin U\left(a, \frac{1}{F(n)+1}\right) \wedge \forall x \left(x \in A_n \to \varrho \in U\left(a, \frac{1}{F(x)+1}\right)\right).$$

(2) $F(n)$ ist echt monoton, d. h. $n_1 < n_2 \to F(n_1) < F(n_2)$. Wir definieren nun für jedes $n \in N_\sigma$ die Menge $M(n)$ als Menge aller $\varrho \in M$, $\varrho \neq a$ mit

$$\varrho \notin U\left(a, \frac{1}{F(n)+1}\right) \wedge \forall x \left(x \in A_n \to \varrho \in U\left(a, \frac{1}{F(x)+1}\right)\right).$$

Es ist dann $M(n) \neq \emptyset$ und $n_1 \neq n_2 \to M(n_1) \cap M(n_2) = \emptyset$. Es gibt also eine Auswahlmenge A aus dem System $\{M(n)\}_{n \in N_\sigma}$. Es sei $A \cap M(n) = \varrho_n$. Dann ist $(\varrho_n)_{n \in N_\sigma}$ eine Folge paarweise verschiedener Elemente $\varrho \in M$, $\varrho \neq a$ mit:

$$\varepsilon \in C_\sigma \wedge \varepsilon > 0 \to \exists N \forall n (n \geqq N \to \varrho_n \in U(a, \varepsilon));$$

denn zu $\varepsilon > 0$ läßt sich ein m angeben mit $\frac{1}{F(m)+1} \leqq \varepsilon$ (denn zu jedem n gibt es ein m mit $n \leqq F(m)$, sonst wäre ja die Mächtigkeit der Menge der Folgenglieder $F(n)$ kleiner als $\|\omega_\sigma\|$), dann ist aber für $n \geqq m + 1 = N$:

$$\varrho_n \in U\left(a, \frac{1}{F(m)+1}\right) \subseteq U(a, \varepsilon).$$

(ϱ_n) konvergiert also gegen a. Es hat aber dann die Menge aller ϱ_n mit $n \geqq N$ die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$; also liegen in $U(a, \varepsilon)$ mindestens $\|\omega_\sigma\|$ viele von a verschiedene Elemente aus M und damit erst recht mindestens $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente von M überhaupt.

Die *Ableitung* M' von $M \subseteq C_\sigma$ sei die Menge aller Häufungspunkte von M. Dann gilt $\boldsymbol{H}M = M \cup M'$.

Satz 3. *$a \in \boldsymbol{H}M$ genau dann, wenn es eine gegen a konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \in M$ gibt. $a \in M'$ genau dann, wenn es eine gegen a konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \in M$ gibt, deren Glieder paarweise verschieden sind.*

Beweis. Ist $a \in \boldsymbol{H}M$ und a isolierter Punkt von M, so ist $a \in M$; dann ist (x_n) mit $x_n = a$ eine gewünschte Folge. Konvergiert umgekehrt (x_n) mit $x_n \in M$ gegen a, so gilt: $\varepsilon > 0 \to \exists N \forall n (n \geqq N \to |x_n - a| < \varepsilon)$, also $M \cap U(a, \varepsilon) \neq \varnothing$ für jedes $\varepsilon > 0$, also $a \in \boldsymbol{H}M$. Die weiteren Behauptungen von Satz 3 folgen aus dem Beweis zu Satz 2.

Wir nennen schließlich eine Menge $M \subseteq C_\sigma$ *abgeschlossen*, falls $M' \subseteq M$ (d. h. $M = \boldsymbol{H}M$), *in sich dicht*, falls $M \subseteq M'$ und *perfekt*, falls $M = M'$ gilt. Perfekte Mengen sind z. B. die Intervalle $\langle a, b\rangle$ bei $a, b \in D_\sigma$.

§ 6 Überdeckungssätze

1. Satz 1. *Für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon$ über C_σ, d. h. eine Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma$ und $b - a = \varepsilon$ derart, daß zwei Intervalle aus $\mathfrak{N}_\varepsilon$ höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben und $C_\sigma \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon$ gilt.*

Beweis. Für jedes $x \in C_\sigma$ definiere man die Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon{}^x$ als Menge aller Intervalle $\langle a, b\rangle$ mit $a = x + n\varepsilon$, $b = x + (n+1)\varepsilon$ bei $n \in G_0$. Man nenne $x \triangleq y$ (äquivalent), falls $\bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon{}^x \cap \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon{}^y \neq \varnothing$ ist (es ist dann sogar $\bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon{}^x \cap \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon{}^y = \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon{}^x = \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon{}^y$). Es ist dann $x \triangleq y$ eine Äquivalenzrelation. Aus jeder Abstraktionsklasse greife man nach dem Auswahlaxiom genau ein Element x heraus und bilde über diese x die Vereinigung $\bigcup_x \mathfrak{N}_\varepsilon{}^x = \mathfrak{N}_\varepsilon$.

Satz 2 (Lindelöfscher Überdeckungssatz). *Ist jedem Punkt x einer beliebigen Punktmenge $M \subseteq C_\sigma$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ zugeordnet und ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$.*

Beweis. Man zerlege M in $\|\omega_\sigma\|$ viele Teilmengen $M_n (n \in N_\sigma)$, die definiert sind zu: $x \in M_n \leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon_x \wedge \forall \gamma \left(0 \leqq \gamma < n \to \varepsilon_x \leqq \frac{1}{\gamma + 1}\right)$. Es ist sofort $M \subseteq \bigcup_{n \in N_\sigma} M_n$. Es genügt zu zeigen, daß M_n durch höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele $U(x, \varepsilon_x)$ überdeckt werden kann. Dazu konstruieren wir nach Satz 1 ein $\frac{1}{2(n+1)}$-Netz $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2(n+1)}}$ über C_σ. M_n wird dann von höchstens $\|\omega_\sigma\|$ vielen der Intervalle $\langle a, b\rangle$ aus diesem Netz überdeckt. Für jedes solche $\langle a, b\rangle$ aus $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2(n+1)}}$ mit $M_n \cap \langle a, b\rangle \neq \varnothing$ wähle man nach dem Auswahlaxiom einen eindeutig bestimmten Punkt $y \in M_n \cap \langle a, b\rangle$ aus; es ist sofort $\langle a, b\rangle \subseteq U(y, \varepsilon_y)$; also läßt sich M_n durch höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele solcher $U(y, \varepsilon_y)$ erst recht überdecken.

Dieser Überdeckungssatz gilt dann trivial auch für beliebige eine gewisse Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ des Punktes x enthaltende Überdeckungsmengen U_x statt $U(x, \varepsilon_x)$, etwa $U_x = (a_x, b_x)$ oder $U_x = \langle a_x, b_x \rangle$ bei $a_x < x < b_x$ und $a_x, b_x \in D_\sigma$.

2. Es gelang nicht, den HEINE-BORELschen Überdeckungssatz (in entsprechend transfiniter Form) in C_σ zu beweisen. Wir setzen diesen Satz (für Intervalle) deshalb versuchsweise als Hypothese, als Überdeckungsaxiom, an und interessieren uns für die Folgerungen daraus. Es sei aber bemerkt, daß alle weiteren Ergebnisse dieser Arbeit — von wenigen für unserer Betrachtungen nicht wesentlichen Sätzen abgesehen — von § 7 ab unabhängig von dieser Hypothese sind. Insbesondere sind alle Behauptungen, die in der Einleitung aufgestellt wurden, ohne Hypothese bewiesen. Alle Sätze, die mit dem Überdeckungsaxiom bewiesen werden, sind durch „*" gekennzeichnet.

Überdeckungsaxiom. *Ist $a, b \in C_\sigma$ mit $a < b$, ist jedem Punkt $x \in \langle a, b \rangle$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ zugeordnet und ist schließlich $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $\langle a, b \rangle \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$.*

Für C_0 ist dieses Axiom natürlich beweisbar.

*Satz 3 (HEINE-BORELscher Überdeckungssatz). *Ist jedem Punkt x einer abgeschlossenen beschränkten Punktmenge $M \subseteq C_\sigma$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ zugeordnet und ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$.*

Beweis. Da M beschränkt ist, gibt es Punkte $a, b \in C_\sigma$ mit $a < b$ und $M \subseteq \langle a, b \rangle$. Alle Punkte y von $\langle a, b \rangle \setminus M = \langle a, b \rangle \cap (C_\sigma \setminus M)$ sind innere Punkte von $C_\sigma \setminus M$, d. h., sie besitzen eine Umgebung $U(y, \varepsilon_y) \subseteq C_\sigma \setminus M$. Wir ordnen jetzt den Punkten $x \in M$ die Umgebungen $U(x, \varepsilon_x) \in \mathfrak{M}$ zu und den Punkten $y \in \langle a, b \rangle \setminus M$ eindeutig Umgebungen $U(y, \varepsilon_y) \subseteq C_\sigma \setminus M$. Dann wird nach dem obigen Axiom $\langle a, b \rangle$ von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen solchen $U(x, \varepsilon_x)$ und $U(y, \varepsilon_y)$ überdeckt, also auch M. Da aber stets $M \cap U(y, \varepsilon_y) = \emptyset$ ist, wird M bereits von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen $U(x, \varepsilon_x)$ überdeckt.

Dieser Überdeckungssatz gilt dann trivial auch für beliebige, eine gewisse Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ des Punktes x enthaltende Überdeckungsmengen U_x statt $U(x, \varepsilon_x)$, etwa $U_x = (a_x, b_x)$ oder $U_x = \langle a_x, b_x \rangle$ bei $a_x < x < b_x$ und $a_x, b_x \in D_\sigma$.

Satz 4. *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von Intervallen $\langle a, b \rangle$ mit $a, b \in C_\sigma$. Dann gilt:*

a) $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \to \bigcup \mathfrak{M}$ *beschränkt*; $\bigcup \mathfrak{M}$ *unbeschränkt* $\to \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqq \|\omega_\sigma\|$.

*b) *Ist $\mathfrak{M}$ außerdem disjunkt bis höchstens auf gewisse Randpunkte, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$; gibt es dazu noch ein $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, so daß für $\langle a, b \rangle \in \mathfrak{M}$ stets $b - a \geqq \varepsilon$ ist, so gilt*

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ beschränkt},$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_\sigma\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ unbeschränkt}.$$

Beweis. a) Ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$, so ist auch die Menge der Randpunkte der Intervalle aus $\mathfrak{M}$ von kleinerer Mächtigkeit als $\|\omega_\sigma\|$; also ist diese Menge beschränkt, also auch $\bigcup \mathfrak{M}$. b) In jedem $\langle a, b \rangle \in \mathfrak{M}$ liegt ein von den Randpunkten a, b verschiedener rationaler Punkt; ordnet man nach dem Auswahlaxiom jedem Inter-

vall $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ genau einen solchen rationalen Punkt zu, so ist also $\mathfrak{M}$ gleichmächtig einer Teilmenge von R_σ, also $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$. „$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \to \bigcup \mathfrak{M}$ beschränkt" folgt bereits aus a). Die andere Richtung folgt so: Es ist zunächst $\bigcup \mathfrak{M}$ abgeschlossen; denn ist h Häufungspunkt von $\bigcup \mathfrak{M}$ mit $h \notin \bigcup \mathfrak{M}$, so gibt es mindestens zwei verschiedene und von h verschiedene Punkte $x, y \in \bigcup \mathfrak{M}$ mit $|h - x, y| < \frac{\varepsilon}{2}$, wobei x, y auf derselben Seite von h liegen, etwa $h < x, y$, und wobei x, y verschiedenen Intervallen aus $\mathfrak{M}$ angehören; dann gehört aber schließlich h einem der beiden Intervalle an, also $h \in \bigcup \mathfrak{M}$, Widerspruch. Jedem Punkt $x \in \langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ ordnen wir das offene Intervall $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ zu. Nach Satz 3 und anschließenden Bemerkungen wird dann, falls $\bigcup \mathfrak{M}$ beschränkt ist, $\bigcup \mathfrak{M}$ von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen solchen Intervallen überdeckt, also auch von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen Intervallen $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ $\left(\text{da ja ein } \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \bigcup \mathfrak{M} \text{ von höchstens drei abgeschlossenen Intervallen aus } \mathfrak{M} \text{ überdeckt wird;}\right)$ also $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$.

Aus Satz 4 folgt sofort: Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma$, ist $M \subseteq C_\sigma$ unbeschränkt und $M \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqq \|\omega_\sigma\|$; ist dabei $\mathfrak{M}$ disjunkt bis auf Randpunkte, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_\sigma\|$. Mit Hilfe des Überdeckungsaxioms folgt noch weiter: Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma$, ist $\mathfrak{M}$ disjunkt bis auf Randpunkte, haben die Intervalle eine Länge $\geqq \varepsilon > 0$ und ist $M \subseteq C_\sigma$ eine beschränkte Menge mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$, so läßt sich M durch weniger als $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente aus $\mathfrak{M}$ überdecken, d. h., es gibt ein $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$. Denn die Menge $\mathfrak{N}$ aller Elemente $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ mit $\langle a, b\rangle \cap M \neq \varnothing$ hat die Eigenschaft, daß $\bigcup \mathfrak{N}$ beschränkt ist, also ist $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$; außerdem ist nach Konstruktion $M \subseteq \bigcap \mathfrak{N}$.

Aus diesen Bemerkungen und Satz 1 folgt: Jedes ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon$ über C_σ hat die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$. Mit Hilfe des Überdeckungsaxioms folgt noch weiter: Jede beschränkte Menge $M \subseteq C_\sigma$ wird bei jedem ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon$ über C_σ von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen Elementen aus $\mathfrak{N}_\varepsilon$ überdeckt.

Unabhängig von dem Satz, daß jede geordnete Menge ohne letztes Element konfinal zu einer Teilmenge vom Typ einer regulären Ordinalzahl ist, kann man mit dem Überdeckungsaxiom den folgenden Satz beweisen:

3. *Satz 5. *Ist $u \in U_\sigma = D_\sigma \setminus C_\sigma$ mit $-\infty_\sigma < u < +\infty_\sigma$, so gibt es von 0 verschiedene natürliche Limeszahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in N_\sigma$, eine echt monoton steigende Folge $(x_n)_{n<\lambda_1}$ und eine echt monoton fallende Folge $(y_m)_{m<\lambda_2}$ von Elementen $x_n, y_m \in C_\sigma$ mit $x_n < u < y_m$ und der Eigenschaft*

$$x, y \in C_\sigma \wedge x < u < y \to \exists n \exists m (x < x_n < u < y_m < y).$$

Beweis. Wir führen den Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die steigende Folge (x_n). Es sei $a \in C_\sigma$ mit $a < u$. Es gibt ein $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $x \in C_\sigma$, $x < u$ gilt: $x + \varepsilon < u$ (andernfalls gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x < u$

mit $x + \varepsilon > u$, also wäre $u \in C_\sigma$, Widerspruch). $\mathfrak{R}$ sei eine bis auf Randpunkte disjunkte Menge von Intervallen $\langle x, y\rangle$ mit $x, y \in C_\sigma$, $y - x = \varepsilon$ und

$$\langle a, u) \subseteq \cup\, \mathfrak{R} \subseteq \langle a - \varepsilon, u);$$

es ist dann $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} < \|\omega_\sigma\|$. $(r_n)_{n<\omega_\sigma}$ sei eine genau $\langle a, u) \cap R_\sigma$ ausschöpfende Folge paarweise verschiedener rationaler Elemente $r_n \in R_\sigma$. Dann definieren wir mit transfiniter Induktion über N_σ die Folge $F(n)$ natürlicher Ordinalzahlen aus $N_\sigma - A_n$ sei der durch $n \in N_\sigma$ bestimmte Abschnitt von N und „μ_m" bedeute „das kleinste m" —:

$$F(n) = \mu_m \{\exists m^* \forall k\big(k \in A_n \to F(k) < m^* \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_{m^*}\big) \to$$
$$\to \forall k\big(k \in A_n \to F(k) < m \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_m\big)\}.$$

Es gilt sofort:

$$F(n) = 0 \leftrightarrow n = 0 \vee \sim \exists m^* \forall k\big(k \in A_n \to F(k) < m^* \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_{m^*}\big),$$
$$0 < n_1 < n_2 \wedge F(n_1) = 0 \to F(n_2) = 0.$$

1. Fall: $\forall n\big(n > 0 \to F(n) \neq 0\big)$. Dann gilt für jedes $n \in N_\sigma$:

$$k \in A_n \to F(k) < F(n) \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_{F(n)}.$$

Es ist also $F(n)$ echt monoton steigend, und für $n_1 \neq n_2$ liegen $r_{F(n_1)}$ und $r_{F(n_2)}$ in verschiedenen Intervallen $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{R}$. Da aber die Menge aller $r_{F(n)}$ wegen des echten Wachsens von $F(n)$ die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$ hat, müßte es, da $r_{F(n_1)}$ und $r_{F(n_2)}$ für $n_1 \neq n_2$ in verschiedenen $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{R}$ liegen, mindestens $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente von $\mathfrak{R}$ geben, im Widerspruch zu $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} < \|\omega_\sigma\|$. Fall 1 ist also unmöglich.
2. Fall: $\exists n\big(n > 0 \wedge F(n) = 0\big)$. n_0 sei das kleinste $n > 0$ mit $F(n) = 0$. Es muß dann n_0 eine natürliche Limeszahl $\lambda \neq 0$ aus N_σ sein. Hätte nämlich n_0 den unmittelbaren Vorgänger n_1, so wäre:

$$k < n_1 \to F(k) < F(n_1) \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_{F(n_1)}.$$

Dann gibt es aber ein m^* mit $r_{F(n_1)} + \varepsilon < r_{m^*}$ und damit ein m^* mit $F(n_1) < m^*$ und $r_{F(n_1)} + \varepsilon < r_{m^*}$ (weil ja mit einem $r_{F(n_1)} + \varepsilon < r$ gleich $\|\omega_\sigma\|$ viele $r \in \langle a, u) \cap R_\sigma$ rechts von $r_{F(n_1)} + \varepsilon$ liegen); also $\exists m^* \forall k\big(k \in A_{n_0} \to F(k) < m^* \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_{m^*}\big)$, also $F(n_0) \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Folge $(x_n)_{n<\lambda} = (r_{F(n)})_{n<\lambda}$ ist dann echt monoton wachsend; ist außerdem $x \in \langle a, u)$ (für $x < u$ und $x \notin \langle a, u)$ ist die folgende Behauptung trivial), so gibt es ein n mit $x < x_n < u$; sonst gäbe es doch ein m^* mit: $k \in A_\lambda \to F(k) < m^* \wedge r_{F(k)} + \varepsilon < r_{m^*}$ (da ja dann alle $x_k \leqq x$ sind, also $x_k + \varepsilon \leqq x + \varepsilon$, also gibt es ein $r \in \langle a, u) \cap R_\sigma$ mit: $x_k + \varepsilon < r$ für alle $k \in A_\lambda$), womit also $F(\lambda) \neq 0$ wäre im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Umkehrung von Satz 5, daß nämlich eine echt monotone Folge $(z_n)_{n<\lambda<\omega_\sigma}$ $(z_n \in C_\sigma)$ kein eigentliches Element $a \in C_\sigma$ als Grenzwert hat (d. h. als obere bzw. untere Grenze), folgt sofort daraus, daß dann a Häufungspunkt der Menge der (z_n) sein müßte, es also mindestens $\|\omega_\sigma\|$ viele z_n geben müßte (Widerspruch zu $\lambda < \omega_\sigma$). Mit Satz 5 und dieser Bemerkung lassen sich also die uneigentlichen Elemente $u \in U_\sigma$, $-\infty_\sigma < u < +\infty_\sigma$ charakterisieren als diejenigen Elemente

$u \in D_\sigma$, die obere (bzw. untere bzw. beides) Grenzen von echt monoton wachsenden (bzw. fallenden bzw. beides) Folgen (x_n) sind bei $x_n \in C_\sigma$, $n < \lambda < \omega_\sigma$ ($\lambda \neq 0$ natürliche Limeszahl); man kann sogar $x_n \in R_\sigma$ fordern. Die eigentlichen Elemente $e \in C_\sigma$ sind, wie bekannt, zu charakterisieren als diejenigen Elemente $e \in D_\sigma$, die derartige obere (bzw. untere bzw. beides) Grenzen echt monotoner Folgen (x_n) sind bei $x_n \in C_\sigma$, $n < \omega_\sigma$; man kann wieder $x_n \in R_\sigma$ fordern. Aus Satz 5 folgt noch der

*Satz 6. *Ist $u \in U_\sigma$ mit $-\infty_\sigma < u < +\infty_\sigma$, ist $M \subseteq C_\sigma$ mit $\overline{\overline{M}} \geqq \|\omega_\sigma\|$, so gibt es Punkte $a, b \in C_\sigma$ mit $a < u < b$ und $\overline{\overline{M \cap (C_\sigma \setminus \langle a, b\rangle)}} \geqq \|\omega_\sigma\|$.*

Beweis. Wenn $\overline{\overline{M}} \geq \|\omega_\sigma\|$, so gibt es eine Teilmenge $N \subseteq M$ mit $\overline{\overline{N}} \geqq \|\omega_\sigma\|$ und: $\bigvee x(x \in N \to x < u) \vee \bigvee x(x \in N \to x > u)$. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\bigvee x(x \in N \to x < u)$. Es gibt eine echt monoton wachsende Folge $(x_n)_{n<\lambda}$ mit $x_n < u$ und $x < u \to \exists n x < x_n < u$. Wäre nun für jedes x_n: $\overline{\overline{N \cap (C_\sigma \setminus \langle x_n, u\rangle)}} < \|\omega_\sigma\|$, so wäre wegen $N = \bigcup_{n<\lambda} [N \cap (C_\sigma \setminus \langle x_n, u\rangle)]$ und $\lambda < \omega_\sigma$ auch $\overline{\overline{N}} < \|\omega_\sigma\|$, Widerspruch.

4. Als weitere Anwendungen des Überdeckungsaxioms beweisen wir noch die folgenden Sätze:

*Satz 7. *Ist $M \subseteq C_\sigma$, M beschränkt und $M' = \emptyset$, so ist $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$.*

Beweis. M ist beschränkt und abgeschlossen. Wegen $M' = \emptyset$ gibt es für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$, die außer x keinen anderen Punkt von M enthält. Nach Satz 3 läßt sich dann M mit weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen solcher Umgebungen überdecken, also $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$.

*Satz 8 (Bolzano-Weierstrasssches Häufungsstellenprinzip). *Ist $M \subseteq C_\sigma$, $\overline{\overline{M}}$ beschränkt und $\overline{\overline{M}} \geqq \|\omega_\sigma\|$, so ist $M' \neq \emptyset$.*

Beweis. Unmittelbare Folgerung aus Satz 7.

*Satz 9. *Jede monoton steigende (fallende) beschränkte Folge (a_n) bei $a_n \in C_\sigma$ besitzt eine eigentliche obere (untere) Grenze $a \in C_\sigma$ und konvergiert gegen diese.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei (a_n) monoton steigend, also $n_1 < n_2 \to a_{n_1} \leqq a_{n_2}$. Ist für ein N: $n \geqq N \to a_n = a_N$, so ist $a = a_N$ die obere Grenze von (a_n) und $\lim a_n = a$. Gibt es andererseits für jedes $N \in N_\sigma$ ein $n > N$ mit $a_N < a_n$, so besitzt (a_n) $\|\omega_\sigma\|$ viele verschiedene Elemente; denn die Folge $(a_n') = (a_{F(n)})$ mit $F(n) = \mu_m \{\bigvee k(k < n \to a_{F(k)} < a_m)\}$ besitzt paarweise verschiedene Elemente. Für jedes $x \in C_\sigma$, $x < a$ (a = obere Grenze von (a_n)) gibt es ein N mit $x < a_N \leqq a$; es liegen also höchstens weniger als $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente von (a_n) außerhalb $\langle x, a\rangle$; da aber (a_n) $\|\omega_\sigma\|$ viele verschiedene Elemente besitzt, muß nach Satz 6 $a \in C_\sigma$ gelten. Es konvergiert dann trivial (a_n) gegen a.

Als Folgerung haben wir: *Jede echt monoton steigende (fallende) beschränkte Folge (a_n) bei $a_n \in D_\sigma$ besitzt eine eigentliche obere (untere) Grenze $a \in C_\sigma$ und konvergiert gegen diese, d. h., es gibt zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein N mit $a - \varepsilon < a_n < a$ ($a < a_n < a + \varepsilon$) für $n \geqq N$.* Man braucht nur jedem a_n eindeutig ein $a_n' \in C_\sigma$ zwischen a_n und a_{n+1} zuzuordnen und auf die Folge (a_n') Satz 9 anzuwenden.

*Satz 10. *Sind* (a_n) *und* (b_n) *eine monoton steigende und eine monoton fallende Folge bei* $a_n, b_n \in C_\sigma$ *mit* $a_n \leqq b_n$ *und* $(b_{n+1} - a_{n+1}) = c\,(b_n - a_n)$, *wo* $c \in C_\sigma$ *eine Konstante mit* $0 < c < 1$ *ist, so bilden* (a_n) *und* (b_n) *eine reelle Intervallschachtelung, die dann also genau einen Punkt* $\alpha \in C_\sigma$ *erfaßt, gegen den* (a_n) *und* (b_n) *konvergieren.*

Beweis. Nach Satz 9 konvergiert (a_n) gegen ihre obere Grenze a und (b_n) gegen ihre untere Grenze b, wobei $a, b \in C_\sigma$ und $a \leqq b$ gilt. Es ist $a = b$ zu zeigen. Wäre $a < b$, so wäre $c\,(b - a) < b - a$ oder $c\,(b - a) + d = b - a$ bei $d \in C_\sigma$, $d > 0$. Dann ist etwa $c\,(b - a) + c\dfrac{d}{2c} < b - a$, also für $\varepsilon = \dfrac{d}{4c}$:

$$c\,((b + \varepsilon) - (a - \varepsilon)) < b - a.$$

Wählt man also ein n mit $a - \varepsilon < a_n$ und $b_n < b + \varepsilon$, so wäre

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) = c\,(b_n - a_n) < c\,((b + \varepsilon) - (a - \varepsilon)) < b - a;$$

wegen $a_{n+1} \leqq a_n$ wäre dann $b_{n+1} < b$ im Widerspruch dazu, daß b untere Grenze der b_n ist.

*Satz 11. *Ist die Folge* (a_n) *bei* $a_n \in C_\sigma$ *beschränkt, so besitzt* (a_n) *eine konvergente Teilfolge* (a_n').

Beweis. Man bilde mit transfiniter Induktion über N_σ die Folge $F(n)$ zu $-A_n$ ist der durch n bestimmte Abschnitt von N_σ und „μ_m“ bedeutet „das kleinste m“ —:

$$F(n) = \mu_m \{\exists\, m^* \forall\, k\,(k \in A_n \to F(k) < m^* \wedge a_{F(k)} \neq a_{m^*}) \to \forall\, k\,(k \in A_n \to \\ \to F(k) < m \wedge a_{F(k)} \neq a_m)\}.$$

Es gilt sofort:

$$F(n) = 0 \leftrightarrow n = 0 \vee \sim \exists\, m^* \forall\, k\,(k \in A_n \to F(k) < m^* \wedge a_{F(k)} \neq a_{m^*}),$$

$$0 < n_1 < n_2 \wedge F(n_1) = 0 \to F(n_2) = 0.$$

1. Fall: $\exists\, n\,(n > 0 \wedge F(n) = 0)$. n_0 sei das kleinste $n > 0$ mit $F(n) = 0$. Dann gilt: $\forall\, k\,(k < n_0 \to F(k) < m) \to \exists\, k\,(k < n_0 \wedge a_{F(k)} = a_m)$. Es gibt dann ein $k_0 < n_0$, so daß $a_{F(k_0)}$ oberhalb jedes Index $N \in N_\sigma$ in der Folge (a_n) als Folgenglied auftritt, also: $\forall\, N \exists\, n\,(n > N \wedge a_n = a_{F(k_0)})$. Man bilde schließlich die Folge $(a_n') = (a_{G(n)})$ mit $G(n) = \mu_m \{a_m = a_{F(k_0)} \wedge \forall\, k\,(k \in A_n \to F(k) < m)\}$; (a_n') ist eine gegen $a_{F(k_0)}$ konvergierende Teilfolge von (a_n).

2. Fall: $\forall\, n\,(n > 0 \to F(n) \neq 0)$. Dann ist $(a_n'') = (a_{F(n)})$ eine Teilfolge von (a_n) mit paarweise verschiedenen Elementen. Nach Satz 8 gibt es einen Häufungspunkt a der Menge der Punkte a_n''. Die Folge $(a_n') = (a''_{G(n)})$ mit

$$G(n) = \mu_m \left\{a_m'' \in U\left(a, \frac{1}{n+1}\right) \wedge \forall\, k\,(k \in A_n \to G(k) < m)\right\}$$

ist eine Teilfolge von (a_n'') und damit von (a_n), die wegen $|a_n' - a| < \dfrac{1}{m+1}$ für $n \geqq m$ gegen a konvergiert.

*Satz 12 (Cantorscher Durchschnittssatz). *Jede fallende Folge nicht leerer beschränkter, abgeschlossener Mengen $C_\sigma \supseteq F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ besitzt einen nicht leeren Durchschnitt.*

Beweis. Man wähle aus jedem F_n einen Punkt a_n aus. Die Folge (a_n) ist dann beschränkt und besitzt eine gegen einen gewissen Punkt $a \in C_\sigma$ konvergierende Teilfolge $(a_n') = (a_{G(n)})$. Es ist $a \in F_N$ für jedes $N \in N_\sigma$. Man bilde dazu für F_N diejenige Teilfolge (a_n'') von (a_n'), die alle Indizes k von (a_n') mit $G(k) \geqq N$ durchläuft; dann gilt $a_n'' \in F_N$, und (a_n'') konvergiert gegen a; also ist $a \in \boldsymbol{H} F_N$; da F_N abgeschlossen ist, ist aber $\boldsymbol{H} F_N = F_N$, also $a \in F_N$. a ist damit auch im Durchschnitt aller F_n gelegen, der somit nicht leer ist.

5. Es sei am Ende noch gezeigt, daß das Überdeckungsaxiom entbehrlich wird, falls man allgemeiner Überdeckungen in D_σ statt nur in C_σ zuläßt. Dann ergeben sich sogar wie im klassischen Fall stets endliche Überdeckungssysteme.

Satz 13. *Ist $a, b \in C_\sigma$ mit $a < b$, ist jedem $x \in D_\sigma$ mit $a \leqq x \leqq b$ eindeutig eine Umgebung $U(x)$, d. h. eine Menge $U(x) = (a_x, b_x)$ bei $a_x, b_x \in C_\sigma$, $a_x < x < b_n$, zugeordnet und ist schließlich $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine endliche Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $\langle a, b\rangle \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

Beweis. M sei die Menge aller $x \in C_\sigma$ mit $a < x \leqq b$, so daß $\langle a, x\rangle$ von endlich vielen Umgebungen aus $\mathfrak{M}$ überdeckt wird, und $M \neq \varnothing$. Man zeigt wie im klassischen Fall, daß die obere Grenze von M gerade b ist.

§ 7 Abgeschlossene und offene Mengen

1. Ist $M \subseteq C_\sigma$ und $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$, so hat M keine Häufungspunkte, also ist $\boldsymbol{H} M = M$, also ist M abgeschlossen.

Satz 1. *Ist $M_1 \subseteq M_2 \subseteq C_\sigma$, so ist $M_1' \subseteq M_2'$ und $\boldsymbol{H} M_1 \subseteq \boldsymbol{H} M_2$.*

Beweis. $M_1' \subseteq M_2'$ ist trivial. Aus $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1' \subseteq M_2'$ folgt aber sofort $\boldsymbol{H} M_1 = M_1 \cup M_1' \subseteq M_2 \cup M_2' = \boldsymbol{H} M_2$.

Satz 2. *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von Teilmengen $M \subseteq C_\sigma$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$; dann ist $\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M\right)' = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M'$ und $\boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H} M$.*

Beweis. $\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M\right)' = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M'$ ist trivial. Nach Satz 1 ist für $M \in \mathfrak{M}$: $\boldsymbol{H} M \subseteq \boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$; also $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H} M \subseteq \boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$. Die andere Richtung $\boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \subseteq \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H} M$ folgt so: Es sei $a \in \boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$, und es gebe ein $M_0 \in \mathfrak{M}$ mit $a \notin \bigcup_{M \in \mathfrak{M} \setminus \{M_0\}} \boldsymbol{H} M$ (andernfalls sind wir fertig). Ist $\mathfrak{M} = \{M_0\}$, so ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = M_0$ und mit $a \in \boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ ist auch $a \in \boldsymbol{H} M_0 = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H} M$. Ist $\mathfrak{M} \neq \{M_0\}$, so ist $\mathfrak{M} \setminus \{M_0\} \neq \varnothing$ und $a \notin \bigcup_{M \in \mathfrak{M} \setminus \{M_0\}} \boldsymbol{H} M$. Es ist $a \in \boldsymbol{H} M_0$ zu zeigen, also: Für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es Punkte $x \in M_0$ mit $x \in U(a, \varepsilon)$. Wegen $a \notin \bigcup_{M \in \mathfrak{M} \setminus \{M_0\}} \boldsymbol{H} M$ gibt es für jedes $M \in \mathfrak{M} \setminus \{M_0\}$ ein $\varepsilon_M > 0$ mit $U(a, \varepsilon_M) \cap M = \varnothing$. Da es nur weniger als $\|\omega_\sigma\|$ viele solche ε_M gibt, haben diese eine untere Grenze $G > 0$; also gibt es ein $\varepsilon' \in C_\sigma$ mit $0 < \varepsilon' < G \leqq \varepsilon_M$, so daß $U(a, \varepsilon') \cap M = \varnothing$

für $M \in \mathfrak{M} \setminus \{M_0\}$ ist. Es sei $\varepsilon'' = \min(\varepsilon, \varepsilon')$; dann gibt es Punkte $x \in \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ mit $x \in U(a, \varepsilon'')$ (wegen $a \in \boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$), aber für kein $y \in \bigcup_{M \in \mathfrak{M} \setminus \{M_0\}} M$ gilt $y \in U(a, \varepsilon'')$. Es ist also $\emptyset \subset U(a, \varepsilon'') \cap \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \subseteq M_0$, also $U(a, \varepsilon'') \cap M_0 \neq \emptyset$, also $U(a, \varepsilon) \cap M_0 \neq \emptyset$.

Satz 3. *Die Ableitung jeder Menge $M \subseteq C_\sigma$ ist abgeschlossen: $M'' \subseteq M'$. Die abgeschlossene Hülle jeder Menge $M \subseteq C_\sigma$ ist abgeschlossen: $\boldsymbol{HHM} = \boldsymbol{HM}$.*

Beweis. Es sei $a \in M''$, zu zeigen ist $a \in M'$, d. h. $\overline{\overline{U(a, \varepsilon) \cap M}} \geqq \|\omega_\sigma\|$ für jedes $\varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0$. Wegen $a \in M''$ gilt $\overline{\overline{U(a, \varepsilon) \cap M'}} \geqq \|\omega_\sigma\|$. Es sei $x \in U(a, \varepsilon) \cap M'$ und $U(x, d) \subseteq U(a, \varepsilon)$. Wegen $x \in M'$ ist $\overline{\overline{U(x, d) \cap M}} \geqq \|\omega_\sigma\|$, also auch $\overline{\overline{U(a, \varepsilon) \cap M}} \geqq \|\omega_\sigma\|$. Es sei $a \in \boldsymbol{HHM}$, zu zeigen ist, daß $U(a, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ ist für jedes $\varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0$. Wegen $a \in \boldsymbol{HHM}$ gilt $U(a, \varepsilon) \cap \boldsymbol{HM} = \emptyset$. Es sei $x \in U(a, \varepsilon) \cap \boldsymbol{HM}$ und $U(x, d) \subseteq U(a, \varepsilon)$. Wegen $x \in \boldsymbol{HM}$ ist $U(x, d) \cap M \neq \emptyset$, also auch $U(a, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.

Satz 4 (Grundeigenschaften abgeschlossener Mengen). (1) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge abgeschlossener Mengen $M \subseteq C_\sigma$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$; dann ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ abgeschlossen.*

(2) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge abgeschlossener Mengen $M \subseteq C_\sigma$ mit $\mathfrak{M} \neq \emptyset$; dann ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ abgeschlossen.*

(3) *$\emptyset$ und C_σ sind abgeschlossen.*

Beweis. (1) $\boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{HM} = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$. (2) Es sei $D = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$; zu zeigen ist $\boldsymbol{HD} \subseteq D$. Wenn $a \in \boldsymbol{HD}$, so ist $a \in \boldsymbol{HM}$ für alle $M \in \mathfrak{M}$. Da M abgeschlossen ist, gilt $\boldsymbol{HM} = M$, also $a \in M$ für alle $M \in \mathfrak{M}$; also $a \in D$. (3) ist trivial.

Satz 5. *Die abgeschlossene Hülle $\boldsymbol{HM}$ einer Menge $M \subseteq C_\sigma$ ist die kleinste die Menge M umfassende abgeschlossene Menge $F \subseteq C_\sigma$; d. h. $\boldsymbol{HM} = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$, wobei $\mathfrak{F}$ die Menge aller abgeschlossenen Mengen F ist mit $M \subseteq F \subseteq C_\sigma$.*

Beweis. Da $\boldsymbol{HM}$ abgeschlossen ist, ist $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \subseteq \boldsymbol{HM}$; für jedes $F \in \mathfrak{F}$ ist andererseits $\boldsymbol{HM} \subseteq \boldsymbol{HF} = F$, also $\boldsymbol{HM} \subseteq \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$; also $\boldsymbol{HM} = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$.

2. $M \subseteq C_\sigma$ heißt *offen*, wenn das Komplement $C_\sigma \setminus M$ abgeschlossen ist. $a \in M \subseteq C_\sigma$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn $a \notin \boldsymbol{H}(C_\sigma \setminus M)$. $a \in M$ ist innerer Punkt von $M \subseteq C_\sigma$ genau dann, wenn es ein $\varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0$ gibt mit $U(a, \varepsilon) \subseteq M$. $M \subseteq C_\sigma$ ist offen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in M$ innerer Punkt von M ist. Offene Mengen sind z. B. die Intervalle (a, b) bei $a, b \in D_\sigma$, ebenso die ε-Umgebungen $U(x, \varepsilon)$ für $x, \varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0$. $U(x, \varepsilon)$ heißt eine *elementare offene Menge*, und jede offene Menge $M \subseteq C_\sigma$ ist sofort die Vereinigung elementarer offener Mengen.

Satz 6 (Grundeigenschaften offener Mengen). (1) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge offener Mengen $M \subseteq C_\sigma$ mit $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$; dann ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ offen.*

(2) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge offener Mengen $M \subseteq C_\sigma$; dann ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ offen.*

(3) *$\emptyset$ und C_σ sind offen.*

Beweis. Folgt aus Satz 4 wie im klassischen Fall.

Dual zur abgeschlossenen Hülle $\boldsymbol{H}M$ von $M \subseteq C_\sigma$ definieren wir den *offenen Kern* $\boldsymbol{K}M$ von M als Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen. $\boldsymbol{K}M$ ist stets offen und ist die größte in M enthaltene offene Menge. $\boldsymbol{K}M$ ist die Menge aller inneren Punkte $x \in M$.

3. Ist $\varnothing \subset M, N \subseteq C_\sigma$, so verstehen wir unter dem *Abstand* $\varrho(M, N)$ von M und N die untere Grenze aller $\varrho(x, y)$ bei $x \in M$, $y \in N$. Ist $x \in C_\sigma$, $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma$, so sei $\varrho(x, M) = \varrho(\{x\}, M)$. Es gilt trivial der

Satz 7. *Ist* $a \in C_\sigma$, $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma$, *so gilt*: $a \in \boldsymbol{H}M \leftrightarrow \varrho(a, M) = 0$. *Ist* $a \in C_\sigma$, $\varnothing \subset M \setminus \{a\} \subseteq C_\sigma$, *so gilt*: $a \in M' \leftrightarrow \varrho(a, M \setminus \{a\}) = 0$.

Ist also M abgeschlossen, so folgt wegen $\boldsymbol{H}M = M$ sofort: $a \in M \leftrightarrow \varrho(a, M) = 0$. Ist $M \cap N \neq \varnothing$, so ist $\varrho(M, N) = 0$; aber nicht umgekehrt, wie das Beispiel $M = (0, 1)$, $N = (1, 2)$ zeigt. Jedoch gilt der

*Satz 8. *Ist* $\varnothing \subset M, N \subseteq C_\sigma$, M *beschränkt*, M *und* N *abgeschlossen und* $\varrho(M, N) = 0$, *so ist* $M \cap N \neq \varnothing$.

Beweis. Für jedes $n \in N_\sigma$ gibt es Punkte $x_n \in M$, $y_n \in N$ mit

$$0 \leqq \varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n+1}.$$

Die Folge (x_n) ist beschränkt. Es gibt also eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $\lim x_{n_k} = x$; dann ist $x \in \boldsymbol{H}M = M$. Wegen

$$|y_{n_k}| \leqq |x_{n_k}| + |y_{n_k} - x_{n_k}| < K + \frac{1}{n_k + 1} \leqq K + 1,$$

falls $|x_{n_k}| < K$ gilt, ist auch (y_{n_k}) beschränkt. Es gibt also wieder eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_l}})$ von (y_{n_k}) mit etwa $\lim y_{n_{k_l}} = y$; dann ist $y \in \boldsymbol{H}N = N$. Es ist schließlich $x = \lim x_{n_{k_l}}$, also $x - y = \lim\limits_{l \to \infty} (x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}) = 0$; also $x = y$.

Satz 9. *Ist* $\varnothing \subset M, N \subseteq C_\sigma$, *so ist*

$$\varrho(M, N) = \varrho(\boldsymbol{H}M, N) = \varrho(M, \boldsymbol{H}N) = \varrho(\boldsymbol{H}M, \boldsymbol{H}N).$$

Beweis. Wegen $\varrho(M, N) = \varrho(N, M)$ genügt es offenbar zu zeigen:

$$\varrho(M, N) = \varrho(\boldsymbol{H}M, N).$$

Wegen $M \subseteq \boldsymbol{H}M$ gilt zunächst $\varrho(\boldsymbol{H}M, N) \leqq \varrho(M, N)$. Man muß also noch zeigen: Wenn $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ und $\varrho(\boldsymbol{H}M, N) < \varepsilon$, so ist auch $\varrho(M, N) < \varepsilon$. Dies folgt so: Ist $\varrho(\boldsymbol{H}M, N) < \varepsilon$, so gibt es Punkte $\bar{x} \in \boldsymbol{H}M$, $y \in N$ mit

$$\varrho(\boldsymbol{H}M, N) \leqq \varrho(\bar{x}, y) < \varepsilon' < \varepsilon,$$

wo $\varepsilon' \in C_\sigma$ eine dem ε fest zugeordnete Zahl mit $\varrho(\boldsymbol{H}M, N) < \varepsilon' < \varepsilon$ ist. In $U(\bar{x}, \varepsilon - \varepsilon')$ gibt es mindestens einen Punkt $x \in M$. Dann ist

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, \bar{x}) + \varrho(\bar{x}, y) < \varepsilon;$$

also $\varrho(M, N) \leqq \varrho(x, y) < \varepsilon$.

Unter dem *Durchmesser* $\delta(M)$ einer Menge $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma$ verstehe man die obere Grenze aller $\varrho(x, y)$ mit $x, y \in M$.

Satz 10. *Ist* $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma$, *so ist* $\delta(\boldsymbol{H}M) = \delta(M)$.

Beweis. Wegen $M \subseteq \boldsymbol{H}M$ gilt zunächst $\delta(\boldsymbol{H}M) \geqq \delta(M)$. Man muß also noch zeigen: Wenn $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ und $\delta(\boldsymbol{H}M) > \varepsilon$, so ist auch $\delta(M) > \varepsilon$. Dies folgt so: Ist $\delta(\boldsymbol{H}M) > \varepsilon > 0$, so gibt es Punkte $\bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{H}M$ mit

$$\delta(\boldsymbol{H}M) \geqq \varrho(\bar{x}, \bar{y}) > \varepsilon' > \varepsilon,$$

wo $\varepsilon' \in C_\sigma$ eine dem ε fest zugeordnete Zahl mit $\delta(\boldsymbol{H}M) > \varepsilon' > \varepsilon$ ist. In $U\left(\bar{x}, \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}\right)$ bzw. $U\left(\bar{y}, \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}\right)$ gibt es mindestens einen Punkt $x \in M$ bzw. $y \in M$. Dann ist

$$\varrho(\bar{x}, \bar{y}) \leqq \varrho(\bar{x}, x) + \varrho(x, \bar{y}) \leqq \varrho(\bar{x}, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, \bar{y}) \leqq (\varepsilon' - \varepsilon) + \varrho(x, y),$$

also $\varrho(x, y) \geqq \varrho(\bar{x}, \bar{y}) - (\varepsilon' - \varepsilon) > \varepsilon$; also $\delta(M) \geqq \varrho(x, y) > \varepsilon$.

4. Für $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma$ verstehen wir unter der *ε-Umgebung* $U(M, \varepsilon)$ von M ($\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$) die Menge aller Punkte $x \in C_\sigma$ mit $\varrho(x, M) < \varepsilon$. Es ist sofort $U(x, \varepsilon) = U(\{x\}, \varepsilon)$.

Satz 11. *Ist* $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, *dann gilt*: $U(M, \varepsilon) = \bigcup_{x \in M} U(x, \varepsilon)$.

Beweis. Ist $y \in U(M, \varepsilon)$, so ist $\varrho(y, M) < \varepsilon$; es existiert also ein $x_0 \in M$ mit $\varrho(y, x_0) < \varepsilon$, also ist $y \in U(x_0, \varepsilon)$. Ist umgekehrt $y \in U(x_1, \varepsilon)$ mit $x_1 \in M$, so ist $\varrho(y, x_1) < \varepsilon$, also erst recht $\varrho(y, M) < \varepsilon$, also $y \in U(M, \varepsilon)$.

Aus den Sätzen 6 (2) und 11 folgt, daß $U(M, \varepsilon)$ offen ist. In Verallgemeinerung der ε-Umgebungen von Punkten und Mengen definiert man die *Umgebungen* $U(x)$ bzw. $U(M)$ von Punkten $x \in C_\sigma$ bzw. Mengen $M \subseteq C_\sigma$ als offene Mengen $U \subseteq C_\sigma$ mit $x \in U$ bzw. $M \subseteq U$.

Satz 12 (Trennungssatz). *Je zwei nicht leere, disjunkte, abgeschlossene Mengen* $F_1, F_2 \subseteq C_\sigma$ *besitzen disjunkte Umgebungen* $U_1 \supseteq F_1$ *und* $U_2 \supseteq F_2$.

Beweis. Aus Satz 7 und den anschließenden Bemerkungen folgt zunächst: $x \in F_1 \to \varrho(x, F_2) > 0$, $y \in F_2 \to \varrho(y, F_1) > 0$. Es gibt also zu jedem $x \in F_1$ eine Zahl $\varrho_x \in C_\sigma$ mit $\varrho(x, F_2) > \varrho_x > 0$ und ebenso zu jedem $y \in F_2$ eine Zahl $\varrho_y \in C_\sigma$ mit $\varrho(y, F_1) > \varrho_y > 0$. Dann bilde man

$$U_1 = \bigcup_{x \in F_1} U\left(x, \frac{\varrho_x}{2}\right), \qquad U_2 = \bigcup_{y \in F_2} U\left(y, \frac{\varrho_y}{2}\right).$$

Es sind U_1, U_2 offene Mengen, die F_1 bzw. F_2 enthalten. Es ist noch $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ zu zeigen. Wäre $z \in U_1 \cap U_2$, so gäbe es Punkte $x \in F_1$ und $y \in F_2$ mit $\varrho(x, z) < \frac{\varrho_x}{2}$ und $\varrho(y, z) < \frac{\varrho_y}{2}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho_x \geqq \varrho_y$. Dann wäre $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \frac{\varrho_x + \varrho_y}{2} \leqq \varrho_x$ im Widerspruch zur Konstruktion der ϱ_x. U_1, U_2 leisten also das Verlangte.

Satz 13. *Jede abgeschlossene Menge $F \subseteq C_\sigma$ ist der Durchschnitt $\|\omega_\sigma\|$ vieler offener Mengen $G \subseteq C_\sigma$.*

Beweis. Der Fall $F = \varnothing$ ist trivial, da $\varnothing = \bigcap_{n \in N_\sigma} U\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$. Es sei also $F \neq \varnothing$. Es genügt zu zeigen: $F = \bigcap_{n \in N_\sigma} U_n$ mit $U_n = U\left(F, \frac{1}{n+1}\right)$. Wegen $F \subseteq U_n$ ist zunächst $F \subseteq \bigcap_{n \in N_\sigma} U_n$. Ist $x \in \bigcap_{n \in N_\sigma} U_n$, so ist $x \in U_n$ für jedes $n \in N_\sigma$, also $\varrho(x, F) < \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in N_\sigma$, also $\varrho(x, F) = 0$, also nach Satz 7: $x \in F$; also $\bigcap_{n \in N_\sigma} U_n \subseteq F$ und damit zusammen $F = \bigcap_{n \in N_\sigma} U_n$.

Satz 14. *Jede offene Menge $G \subseteq C_\sigma$ ist die Vereinigung $\|\omega_\sigma\|$ vieler abgeschlossener Mengen $F \subseteq C_\sigma$.*

Beweis. Nach Satz 13 ist $F = C_\sigma \setminus G = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$, wo $\mathfrak{M}$ ein System offener Mengen $M \subseteq C_\sigma$ ist mit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_\sigma\|$. Dann ist aber $G = C_\sigma \setminus F = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} (C_\sigma \setminus M)$, wo die $(C_\sigma \setminus M)$ jetzt abgeschlossene Mengen sind.

5. Es sei $M \subseteq A \subseteq C_\sigma$; dann heiße M *in A abgeschlossen*, wenn $M' \cap A \subseteq M$ gilt; M heiße *in A offen*, falls $A \setminus M$ in A abgeschlossen ist. M ist in A abgeschlossen (offen) genau dann, wenn $M = F \cap A$ ($M = G \cap A$), wo $F \subseteq C_\sigma$ ($G \subseteq C_\sigma$) eine abgeschlossene (offene) Menge ist. Jede abgeschlossene (offene) Menge $M \subseteq A$ ist in A abgeschlossen (offen). Ist A abgeschlossen (offen), so ist jede in A abgeschlossene (offene) Menge $M \subseteq A$ abgeschlossen (offen). Für $A \subseteq C_\sigma$ sind trivial $\varnothing$ und A in A abgeschlossen und in A offen. Weiterhin gilt der

Satz 15. a) *Es sei $A \subseteq C_\sigma$ und $\mathfrak{M}$ eine Menge in A abgeschlossener Mengen $M \subseteq A$; ist dann $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$, so ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A abgeschlossen; ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, so ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A abgeschlossen.* b) *Es sei $A \subseteq C_\sigma$ und $\mathfrak{M}$ eine Menge in A offener Mengen $M \subseteq A$; ist dann $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$, so ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A offen; es ist stets $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A offen.*

Beweis. a) $M \in \mathfrak{M} \to (\boldsymbol{H}M) \cap A = M$. Ist dann $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$, so ist

$$\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = A \cap \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}M;$$

da $\boldsymbol{H}M$ abgeschlossen ist, so ist nach den Grundeigenschaften abgeschlossener Mengen auch $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}M$ abgeschlossen; also $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A abgeschlossen. Ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, so ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M = A \cap \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}M$; da $\boldsymbol{H}M$ abgeschlossen ist, so ist nach den Grundeigenschaften abgeschlossener Mengen auch $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}M$ abgeschlossen; also $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A abgeschlossen. b) $M \in \mathfrak{M} \to (\boldsymbol{H}(A \setminus M)) \cap A = A \setminus M$. Ist dann $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$, so ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} (A \setminus M) = A \setminus \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M = A \cap \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}(A \setminus M)$, also $A \setminus \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A abgeschlossen.

also $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A offen. Ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ beliebig, so ist

$$\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} (A \setminus M) = A \setminus \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = A \cap \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}(A \setminus M),$$

also $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ in A offen; für $\mathfrak{M} = \varnothing$ ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = \varnothing$ und $A \setminus \varnothing = A$ und $A' \cap A \subseteq A$, also $\varnothing$ in A offen.

6. $G \subseteq C_\sigma$ sei eine offene Menge; dann heiße $M \subseteq C_\sigma$ *dicht in* G, falls $G \subseteq \boldsymbol{H}M$. Zu jeder Menge $M \subseteq C_\sigma$ gibt es eine größte offene Menge $G_M \subseteq C_\sigma$, in der M dicht ist, nämlich $G_M = \boldsymbol{K}\boldsymbol{I}\boldsymbol{I}M$. Ist $G_M = C_\sigma$ für $M \subseteq C_\sigma$, so heiße M in C_σ *überall dicht*; es ist dann wegen $G_M = C_\sigma \subseteq \boldsymbol{H}M$ auch $\boldsymbol{H}M = C_\sigma$; ist $G_M = \varnothing$, so heiße M in C_σ *nirgends dicht*. Es gelten wie im klassischen Fall die Sätze:

M ist genau dann dicht in G (überall dicht in C_σ, nirgends dicht in C_σ), falls $\boldsymbol{H}M$ diese Eigenschaft besitzt.

M ist in C_σ genau dann nirgends dicht, wenn $\boldsymbol{H}M$ keinen inneren Punkt besitzt.

M ist in C_σ genau dann nirgends dicht, wenn jede offene Menge G eine nicht leere, offene Menge $G_0 \subseteq G$ umfaßt mit $G_0 \cap M = \varnothing$.

M ist in G genau dann dicht, wenn für jede nicht leere, offene Teilmenge $G_0 \subseteq G$ gilt: $G_0 \cap M \neq \varnothing$.

Ist M in G dicht, so auch $M \cap G$.

Eine abgeschlossene Menge F ist in C_σ genau dann nirgends dicht, wenn $G = C_\sigma \setminus F$ in C_σ überall dicht ist.

7. Ist $M \subseteq C_\sigma$, so heiße $\gamma_M = (\boldsymbol{H}M) \cap (\boldsymbol{H}(C_\sigma \setminus M))$ die *Begrenzung* von M und $\varrho_M = M \cap \gamma_M$ der *Rand* von M. Es ist sofort $\gamma_M = \gamma_{C_\sigma \setminus M}$. Es gelten wie im klassischen Fall die Sätze:

$\gamma_M = \varnothing$ gilt genau dann, wenn M zugleich abgeschlossen und offen ist.

γ_M ist stets abgeschlossen.

$\varrho_M = M \cap (C_\sigma \setminus M)'$ und $\gamma_M = \varrho_M \cup \varrho_{C_\sigma \setminus M}$.

$M \cup \gamma_M = \boldsymbol{H}M$ und $M \setminus \gamma_M = \boldsymbol{K}M$.

M ist abgeschlossen genau dann, wenn $\gamma_M \subseteq M$ ist; M ist offen genau dann, wenn $M \cap \gamma_M = \varnothing$ ist.

Ist M abgeschlossen oder offen, so ist γ_M in C_σ nirgends dicht.

Sind $\gamma_{M_1}, \gamma_{M_2} \neq \varnothing$, so ist $\varrho(M_1, M_2) \leqq \varrho(\gamma_{M_1}, \gamma_{M_2})$.

§ 8 Borelsche Mengen

$M \subseteq C_\sigma$ heiße eine *Menge vom Typus O_Σ*, falls M offen ist; M heiße eine *Menge vom Typus O_Δ*, falls M abgeschlossen ist, und M heiße schließlich eine *Menge vom Typus O*, falls M vom Typus O_Σ oder O_Δ ist. Seien für jedes $\beta \in N$ mit $\beta < \alpha$ bei $O < \alpha \in N$ die Mengen der Typen $\beta_\Sigma, \beta_\Delta, \beta$ erklärt, so nennt man eine Menge $M \subseteq C_\sigma$ *vom Typus α_Σ*, falls es ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ gibt mit: $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leq \|\omega_\sigma\|$, $X \in \mathfrak{M} \to X \subseteq C_\sigma \wedge$ Typus von X ist kleiner als α, $M = \cup\, \mathfrak{M}$; M heiße *vom Typus α_Δ*,

falls es ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ gibt mit: $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$, $X \in \mathfrak{M} \to X \subseteq C_\sigma \wedge$ Typus von X ist kleiner als α, $M = \bigcap \mathfrak{M}$; M habe schließlich den *Typus* α, falls M vom Typus α_Σ oder α_Δ ist. $M \subseteq C_\sigma$ heißt eine B-*Menge* (Borelsche *Menge*), falls es ein $\alpha \in N$ gibt, so daß M eine Menge vom Typus α ist. $\mathfrak{B}_\sigma$ sei die Menge aller B-Mengen (bezüglich C_σ).

Jede Menge vom Typus α ist eine Menge vom Typus β mit $\beta > \alpha$ (denn $M = \bigcup \{M\}$). Jede Menge von einem Typus $\alpha \geqq \|\omega_{\sigma+1}\|$ ist eine Menge von einem Typus β mit $\beta < \beta < \|\omega_{\sigma+1}\|$ (denn dies gilt für $\alpha = \|\omega_{\sigma+1}\|$ und dann nach transfiniter Induktion auch für $\alpha > \|\omega_{\sigma+1}\|$). Es gilt also: M ist B-Menge genau dann, wenn M eine Menge von einem Typus $\alpha < \|\omega_{\sigma+1}\|$ ist.

$\mathfrak{K}$ nennen wir einen *Mengenkörper in* C_σ, falls $\mathfrak{K}$ eine Menge von Mengen $M \subseteq C_\sigma$ ist, wobei gelten soll:

(1) $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K} \wedge 0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_\sigma\| \to \bigcup \mathfrak{M} \in \mathfrak{K} \wedge \bigcap \mathfrak{M} \in \mathfrak{K}$,

(2) $M \in \mathfrak{K} \to C_\sigma \setminus M \in \mathfrak{K}$.

Satz 1: *$\mathfrak{B}_\sigma$ ist der kleinste Mengenkörper $\mathfrak{K}$ in C_σ, der als Elemente alle abgeschlossenen (offenen) Mengen $M \subseteq C_\sigma$ enthält.*

Beweis. $\mathfrak{B}_\sigma$ ist zunächst überhaupt ein solcher Mengenkörper $\mathfrak{K}$ in C_σ. $\mathfrak{B}_\sigma$ enthält ja trivial alle abgeschlossenen (offenen) Mengen $M \subseteq C_\sigma$. Wegen der Regularität von $\omega_{\sigma+1}$ gilt die Bedingung (1) der Mengenkörper in C_σ. Bedingung (2) folgt so: Für Mengen M vom Typus $\alpha = O$ hat auch $C_\sigma \setminus M$ den Typus α; setzt man für alle Mengen von Typen β mit $O \leqq \beta < \alpha$ (α fest) voraus, daß mit M auch $C_\sigma \setminus M$ den Typus β hat, so folgt aus den Dualitätsbeziehungen

$$C_\sigma \setminus \bigcup_{M \in \mathfrak{M} \neq \emptyset} M = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} (C_\sigma \setminus M)$$

und

$$C_\sigma \setminus \bigcap_{M \in \mathfrak{M} \neq \emptyset} M = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} (C_\sigma \setminus M)$$

auch, daß mit einer Menge vom Typus α ebenfalls $C_\sigma \setminus M$ den Typus α hat. Also gilt: $M \in \mathfrak{B}_\sigma \to C_\sigma \setminus M \in \mathfrak{B}_\sigma$. Ist $\mathfrak{K}$ ein Mengenkörper in C_σ, der alle abgeschlossenen (offenen) Mengen enthält, so enthält er nach (2) auch deren Komplemente, also alle Mengen vom Typus O. Enthält für $O \leqq \beta < \alpha$ $\mathfrak{K}$ alle Mengen von Typen β, so nach (1) auch alle Mengen vom Typus α. Also ist $\mathfrak{B}_\sigma \subseteq \mathfrak{K}$; damit ist $\mathfrak{B}_\sigma$ der kleinste derartige Mengenkörper. Da auch der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller solcher Mengenkörper $\mathfrak{K}$ in C_σ ein ebensolcher Mengenkörper ist, so ist weiterhin $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{D}$.

§ 9 ω_σ-Basen

1. Eine Menge S offener Mengen $\Gamma \subseteq C_\sigma$ heißt *Basis von* C_σ, falls es zu jeder offenen Menge $G \subseteq C_\sigma$ ein Teilsystem $S^* \subseteq S$ gibt mit $G = \bigcup_{\Gamma \in S^*} \Gamma$.

Satz 1. *Eine Menge S offener Mengen $\Gamma \subseteq C_\sigma$ ist genau dann eine Basis von C_σ, wenn es zu jedem $x \in C_\sigma$ und zu jeder Umgebung $U(x)$ ein $\Gamma_0 \in S$ gibt mit*

$$x \in \Gamma_0 \subseteq U(x).$$

Beweis. S sei eine Basis von C_σ; da $U(x)$ dann die Vereinigung gewisser $\Gamma \in S$ ist, gibt es ein Γ_0 mit $x \in \Gamma_0 \subseteq U(x)$. Umgekehrt gibt es zu jeder offenen Menge $G \subseteq C_\sigma$ und jedem $x \in G$ ein $\Gamma_0 \in S$ mit $x \in \Gamma_0 \subseteq G$; G ist dann die Vereinigung aller in G enthaltenen $\Gamma \in S$.

Man kann in Satz 1 $U(x)$ durch $U(x, \varepsilon)$ ersetzen.

Satz 2. *Ist M in C_σ überall dicht, so ist die Menge S aller $U(a, r)$ bei $a \in M$ und $r \in R_\sigma$, $r > 0$ eine Basis von C_σ.*

Beweis. Sei $x \in C_\sigma$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$; man wähle ein $a \in M$ mit $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $r \in R_\sigma$ mit $\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{2}{3}\varepsilon$. Dann ist $x \in U(a, r)$, da $\varrho(a, x) < \frac{\varepsilon}{3} < r$; außerdem ist $U(a, r) \subseteq U(x, \varepsilon)$, da für $x' \in U(a, r)$ gilt

$$\varrho(x, x') \leqq \varrho(x, a) + \varrho(a, x') < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Da R_σ überall dicht in C_σ ist, gilt sofort — S heiße eine *ω_σ-Basis von C_σ*, falls S eine Basis von C_σ ist mit $\overline{S} = \|\omega_\sigma\|$ — der

Satz 3. *Die Menge S aller $U(a, r)$ bei a, $r \in R_\sigma$, $r > 0$ ist eine ω_σ-Basis von C_σ.*

Ist S eine Basis von C_σ, so heißt jedes $\Gamma \in S$ mit $x \in \Gamma$ bei festem $x \in C_\sigma$ eine *S-Umgebung* von x.

Satz 4. *Ist $M \subseteq C_\sigma$, $x \in C_\sigma$ und S eine Basis von C_σ, dann ist $x \in \boldsymbol{H}M$ genau dann, wenn jede S-Umgebung von x einen Punkt von M besitzt.*

Beweis. Ist $x \in \boldsymbol{H}M$, so enthält jede Umgebung von x einen Punkt von M, also auch jede S-Umgebung von x. Enthält umgekehrt jede S-Umgebung von x Punkte von M, so enthält auch jede Umgebung $U(x, \varepsilon)$, die ja eine gewisse S-Umgebung von x umfaßt, einen Punkt von M.

2. Satz 5. *Jede Menge $M \subseteq C_\sigma$ besitzt nur höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele isolierte Punkte.*

Beweis. $x \in M$ ist isolierter Punkt von M, falls es eine Umgebung $U(x, \varepsilon)$ gibt mit $M \cap U(x, \varepsilon) = \{x\}$. Ist S eine ω_σ-Basis von C_σ, so gibt es zu jedem isolierten Punkt $x \in M$ ein $\Gamma \in S$ mit $x \in M \cap \Gamma \subseteq M \cap U(x, \varepsilon) = \{x\}$, also $M \cap \Gamma = \{x\}$. Damit gilt die Behauptung.

Ist $M \subseteq C_\sigma$, so nennen wir $a \in C_\sigma$ einen *Kondensationspunkt* von M, falls jede Umgebung $U(a, \varepsilon)$ mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M enthält. Jeder Kondensationspunkt von M ist erst recht Häufungspunkt von M.

Satz 6. *Ist $M \subseteq C_\sigma$, $x \in C_\sigma$ und S eine ω_σ-Basis von C_σ, so ist x Kondensationspunkt von M genau dann, wenn jede S-Umgebung von x mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M besitzt.*

Beweis. Ist x Kondensationspunkt von M, so enthält jede Umgebung von x mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M, also auch jede S-Umgebung. Enthält umgekehrt jede S-Umgebung von x mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M, so enthält auch jede Umgebung $U(x, \varepsilon)$, die ja eine gewisse S-Umgebung von x umfaßt, mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M.

Satz 7 (Satz von Lindelöf). *Ist $M \subseteq C_\sigma$ und M^* die Menge aller $x \in M$, die keine Kondensationspunkte von M sind, so ist $\overline{\overline{M^*}} \leqq \|\omega_\sigma\|$.*

Beweis. Ist x kein Kondensationspunkt von M, so gibt es eine S-Umgebung von x, die höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M enthält. Jedem Nicht-Kondensationspunkt von M ordne man eine solche S-Umgebung zu. Dann hat die Menge der so auserwählten S-Umgebung höchstens die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$. Jede dieser Umgebungen enthält nur höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M, also gibt es nur höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M, die in der Vereinigung aller dieser Umgebungen liegen. Da alle Nicht-Kondensationspunkte von M in dieser Vereinigung liegen, ist die Behauptung bewiesen.

Satz 8. *Es sei $M \subseteq C_\sigma$ und Φ die Menge der Kondensationspunkte von M. Dann gilt: Φ ist perfekt; $\overline{\overline{M}} \leqq \|\omega_\sigma\| \to \Phi = \varnothing$; $\overline{\overline{M}} > \|\omega_\sigma\| \to \overline{\overline{\Phi}} > \|\omega_\sigma\|$. Jeder Punkt $a \in \Phi$ ist Kondensationspunkt von Φ.*

Beweis. Trivial ist $\overline{\overline{M}} \leqq \|\omega_\sigma\| \to \Phi = \varnothing$. Aus Satz 7 folgt nun $\overline{\overline{M}} > \|\omega_\sigma\| \to$ $\to \overline{\overline{\Phi}} > \|\omega_\sigma\|$. Wir müssen also nur noch zeigen, daß Φ abgeschlossen ist und jedes $a \in \Phi$ Kondensationspunkt von Φ ist. Es sei $a \in \boldsymbol{H}\Phi$. Dann enthält jede Umgebung $U(a)$ einen Punkt $x \in \Phi$. Es ist $U(a)$ auch eine Umgebung $U(x)$, also $\overline{\overline{M \cap U(a)}} > \|\omega_\sigma\|$, also $a \in \Phi$, also $\boldsymbol{H}\Phi = \Phi$, also ist Φ abgeschlossen. Es sei $a \in \Phi$ und $U(a)$ eine Umgebung von a; dann ist $\overline{\overline{M \cap U(a)}} > \|\omega_\sigma\|$. Nach Satz 7 enthält $M \cap U(a)$ mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Kondensationspunkte von $M \cap U(a)$, also enthält $U(a)$ mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Kondensationspunkte von M, also ist a Kondensationspunkt von Φ.

Als Folgerung aus Satz 8 läßt sich jede abgeschlossene Menge $F \subseteq C_\sigma$, falls sie nicht höchstens die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$ hat, disjunkt zerlegen in eine perfekte Menge Φ_1 mit $\overline{\overline{\Phi}}_1 > \|\omega_\sigma\|$ und eine Menge Φ_2 mit $\overline{\overline{\Phi}}_2 \leqq \|\omega_\sigma\|$: $F = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Man braucht ja nur als Φ_1 die Menge der Kondensationspunkte von F zu wählen und $\Phi_2 = F \setminus \Phi_1$ zu setzen.

3. Satz 9. *S sei eine Menge offener Mengen $G \subseteq C_\sigma$ mit $\overline{\overline{S}} > \|\omega_\sigma\|$. Dann gibt es eine Teilmenge $S^* \subseteq S$ mit $\overline{\overline{S^*}} \leqq \|\omega_\sigma\|$ und $\bigcup_{G \in S} G = \bigcup_{G \in S^*} G$.*

Beweis. T sei eine ω_σ-Basis von C_σ. $\Gamma \in T$ heiße „ausgezeichnet", falls es ein $G \in S$ gibt mit $\Gamma \subseteq G$. T^* sei die Menge aller ausgezeichneten $\Gamma \in T$. Jedem $\Gamma \in T^*$ ordne man genau ein $G \in S$ zu mit $\Gamma \subseteq G$; S^* sei die dadurch entstehende Teilmenge von S. Es ist sofort $\overline{\overline{S^*}} \leqq \|\omega_\sigma\|$. Ist $x \in G \in S$, so gibt es — da G offen und T Basis von C_σ ist — ein $\Gamma \in T$ mit $x \in \Gamma \subseteq G$; dieses Γ ist dann Element von T^*; also gibt es ein $G^* \in S^*$ mir $x \in G^*$, also $\bigcup_{G \in S} G = \bigcup_{G \in S^*} G$.

4. Eine wohlgeordnete echt wachsende (echt fallende) Menge von Mengen $M \subseteq N_\sigma$ hat höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente. Sind nämlich $M_\alpha, M_{\alpha+1}$ aus dieser wohlgeordneten Menge und ist $n_\alpha \in M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$ ($n_\alpha \in M_\alpha \setminus M_{\alpha+1}$), so gäbe es mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente $n \in N_\sigma$, sofern es mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele M_α gäbe, was ein Widerspruch ist.

Satz 10 (Satz von Baire-Hausdorff). *Jede wohlgeordnete wachsende oder fallende Menge von Mengen $M \subseteq C_\sigma$, die entweder alle abgeschlossen oder alle offen sind, enthält höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele verschiedene Elemente.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für offene Mengen; durch Komplementbildung folgt er dann auch für abgeschlossene Mengen. In einem vorgegebenen wohlgeordneten wachsenden bzw. fallenden System offener Mengen $G \subseteq C_\sigma$ gebe es mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele verschiedene Elemente:

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_\alpha \subset \cdots \quad \text{bzw.} \quad G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_\alpha \supset \cdots .$$

$S = (\Gamma_n)_{n<\omega_\sigma}$ sei eine ω_σ-Basis von C_σ. Man bilde zu jedem G_σ die Menge M_α aller $n \in N_\sigma$ mit $\Gamma_n \subseteq G_\alpha$. Es ist sofort: $G_\alpha \subset G_\beta \to M_\alpha \subset M_\beta$. Nach der obigen Bemerkung gibt es also höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele M_α, also auch nur höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele G_α, Widerspruch.

Wie im klassischen Fall folgert man aus Satz 10 den

Satz 11. *$(M_\alpha)_{\alpha<\omega_{\sigma+1}}$ sei eine wohlgeordnete wachsende oder fallende Folge von Mengen $M \subseteq C_\sigma$, die entweder alle abgeschlossen oder alle offen sind. Dann gibt es ein $\alpha < \omega_{\sigma+1}$ mit $M_\alpha = M_\beta$ für $\alpha \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$.*

Die *Ableitung α-ter Ordnung* $M^{(\alpha)}$ einer Menge $M \subseteq C_\sigma$ definiere man folgendermaßen: $M^{(1)} = M'$; ist $1 \leqq \alpha < \omega_{\sigma+1}$, so sei $M^{(\alpha+1)} = M^{(\alpha)\prime}$; ist $1 \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$ und β Limeszahl, so sei $M^{(\beta)} = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} M^{(\alpha)}$. Dann gilt der

Satz 12 (Satz von Cantor-Bendixson). *Für jede Menge $M \subseteq C_\sigma$ gibt es eine erste natürliche Ordinalzahl $\alpha < \omega_{\sigma+1}$, so daß $M^{(\alpha)}$ perfekt ist, und $M^{(\alpha)} = M^{(\beta)}$ gilt für $\alpha \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$.*

Beweis. Die $M^{(\alpha)}$ bilden ein wohlgeordnetes fallendes System abgeschlossener Mengen $M \subseteq C_\sigma$, woraus nach Satz 11 die Existenz eines ersten α mit $M^{(\alpha)} = M^{(\beta)}$ für $\alpha \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$ folgt. Wegen $M^{(\alpha)} = M^{(\alpha+1)} = M^{(\alpha)\prime}$ ist $M^{(\alpha)}$ auch perfekt.

Für das $M^{(\alpha)}$ von Satz 12 gilt noch: $M^{(\sigma)} = \varnothing \to \overline{\overline{M}} \leqq \|\omega_\sigma\|$; denn ist $\overline{\overline{M}} > \|\omega_\sigma\|$ und Φ die Menge der Kondensationspunkte von M, so ist wegen $\overline{\overline{\Phi}} > \|\omega_\sigma\|$ und $\Phi \subseteq M^{(\alpha)}$ auch $\overline{\overline{M^{(\alpha)}}} > \|\omega_\sigma\|$.

§ 10 Zusammenhang

1. Der in diesem Paragraphen eingeführte Zusammenhangsbegriff bildet die Grundlage für die diskontinuierliche Struktur der C_σ. Definiert man zunächst wie im klassischen Fall eine Menge $M \subseteq C_\sigma$ als zusammenhängend, falls es keine Mengen $M_1, M_2 \subseteq M$ gibt mit $M_1, M_2 \neq \varnothing$; $M_1 \cap M_2 = \varnothing$; $M = M_1 \cup M_2$ und M_1, M_2 in M abgeschlossen (offen), so gibt es in C_σ für $\sigma > 0$ keine zusammenhängenden Mengen außer den Einermengen $\{x\}$ mit $x \in C_\sigma$ und der leeren Menge $\varnothing$. Denn ist $M \subseteq C_\sigma$ und $x, y \in M$, $x < y$, so bilde man bei $n \in N_0$ die untere Grenze g der Menge $\left(x + \dfrac{y-x}{n+1}\right)$; wegen $x < x + \dfrac{y-x}{\omega} < x + \dfrac{y-x}{n+1}$ für jedes $n \in N_0$

ist $x < g < y$, außerdem $g \in U_\sigma$. Dann ist

$$M = (M \cap (-\infty_\sigma, g)) \cup (M \cap (g, +\infty_\sigma)),$$

wobei $(-\infty_\sigma, g)$ und $(g, +\infty_\sigma)$ abgeschlossen (offen) sind. Also sind

$$M_1 = M \cap (-\infty_\sigma, g) \text{ und } M_2 = M \cap (g, +\infty_\sigma)$$

in M abgeschlossene (offene) Mengen mit $M_1, M_2 \neq \emptyset$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M = M_1 \cup M_2$; M ist demnach unzusammenhängend.

Wir brauchen für die C_σ mit $\sigma > 0$ einen anderen Zusammenhangsbegriff, welcher dem in der Natur der Sache liegenden diskontinuierlichen Charakter der C_σ Rechnung trägt. Wir führen dazu einen relativierten Zusammenhangsbegriff ein, den *h-Zusammenhang* (für jedes $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$), der inhaltlich gesehen auch noch solche Mengen zusammenhängend nennt, die Lücken aufweisen mit einem Durchmesser unterhalb h.

Eine Menge $M \subseteq C_\sigma$ heißt für $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ ($\sigma \geqq 0$) *h-unzusammenhängend*, falls es Mengen $M_1, M_2 \subseteq M$ gibt mit: $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in M abgeschlossen (offen). M heißt *h-zusammenhängend*, falls M nicht h-unzusammenhängend ist. Ist M h-unzusammenhängend mit den in M abgeschlossenen Mengen M_1, M_2, so auch mit den in M offenen Mengen M_1, M_2 und umgekehrt, da M_1 und M_2 wegen $M_1 = M \setminus M_2$, $M_2 = M \setminus M_1$ in M abgeschlossen sind genau dann, wenn sie in M offen sind.

Ist $M \subseteq C_\sigma$, so sind $\emptyset$ und M offen-abgeschlossene Mengen, die sogenannten trivialen in M offen-abgeschlossenen Mengen. Es ist dann M h-unzusammenhängend genau dann, wenn es eine nicht-triviale in M offen-abgeschlossene Menge M^* gibt mit $\varrho(M^*, M \setminus M^*) \geqq h$. Ist $h \in C_\sigma$ bei $\sigma > 0$, $h > 0$ und bildet man die obere Grenze G der Zahlenfolge $(n \cdot h)_{n \in N_0}$, so ist $G \in U_\sigma$. Setzt man $M^* = (-\infty_\sigma, G)$, dann ist etwa $\omega \cdot h \in C_\sigma \setminus M^* = (G, +\infty_\sigma)$, also ist M^* eine nicht-triviale offen-abgeschlossene Menge. Für $x \in M^*$, $y \in C_\sigma \setminus M^*$ ist außerdem $y - x > h$, da sonst $y \in M^*$ wäre; also $\varrho(M^*, C_\sigma \setminus M^*) \geqq h$. Damit ist gezeigt, daß C_σ bei $\sigma > 0$ für jedes $h \in C_\sigma$ mit $h \geqq 0$ h-unzusammenhängend ist (für $h = 0$ s. o.).

Der 0-Zusammenhang ist der gewöhnliche klassische Zusammenhang. Für C_σ bei $\sigma > 0$ und $h \in C_\sigma$, $h = 0$ ergibt sich also nach oben der totale h-Unzusammenhang, d. h., 0-zusammenhängend sind nur $\emptyset$ und die $\{x\}$ mit $x \in C_\sigma$. Ist $M \subseteq C_\sigma (\sigma \geqq 0)$ h_1-zusammenhängend und $h_2 \in C_\sigma$, $h_1 \leqq h_2$, so ist M auch h_2-zusammenhängend; ist M h_2-unzusammenhängend und $h_1 \in C_\sigma$, $0 \leqq h_1 \leqq h_2$, so ist M auch h_1-unzusammenhängend.

Eine abgeschlossene (offene) h-zusammenhängende Menge $M \subseteq C_\sigma$ heißt ein *h-Kontinuum* (*h-Gebiet*) (bezüglich C_σ). Eine abgeschlossene (offene) Menge $M \subseteq C_\sigma$ ist ein h-Kontinuum (h-Gebiet) genau dann, wenn es keine Mengen $M_1, M_2 \subseteq M$ gibt mit: $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 abgeschlossen (offen).

2. Wir stellen jetzt einige Sätze über den h-Zusammenhang auf.

Satz 1. *Ist* $M_1, M_2 \subseteq A \subseteq C_\sigma$; $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M \subseteq M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h \geqq 0$ *bei* $h \in C_\sigma$; M_1, M_2 *abgeschlossen (offen) in* A; M *h-zusammenhängend, so gilt* $M \subseteq M_1$ *oder* $M \subseteq M_2$.

Beweis. Es ist $M = (M \cap M_1) \cup (M \cap M_2)$; $M \cap M_1$ und $M \cap M_2$ sind in M abgeschlossen (offen); es ist $\varrho(M \cap M_1, M \cap M_2) \geqq \varrho(M_1, M_2) \geqq h$, falls $M \cap M_1$, $M \cap M_2 \neq \emptyset$; also wäre dann M h-unzusammenhängend. Es muß also $M \cap M_1 = \emptyset$ oder $M \cap M_2 = \emptyset$ gelten, also $M = M \cap M_1$ oder $M = M \cap M_2$, also $M \subseteq M_1$ oder $M \subseteq M_2$.

Satz 2. *S sei eine Menge h-zusammenhängender Mengen $M \subseteq C_\sigma$ mit $\bigcap_{M \in S} M \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcup_{M \in S} M$ h-zusammenhängend.*

Beweis. Wäre $A = \bigcup_{M \in S} M$ h-unzusammenhängend, so gäbe es in A abgeschlossene Mengen M_1, M_2 mit $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $A = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geq h$. Es wäre stets für $M \in S$: $M \subseteq M_1 \cup M_2$, also $M \subseteq M_1 \vee M \subseteq M_2$ und $M \neq \emptyset \rightarrow M \subseteq M_1 \leftrightarrow M \nsubseteq M_2$. Ist nun $S = \emptyset$, so auch $A = \emptyset$, also A h-zusammenhängend. Ist $S \neq \emptyset$, so gibt es wegen $\bigcap_{M \in S} M \neq \emptyset$ einen Punkt $a \in C_\sigma$ mit $M \in S \rightarrow a \in M$. Ist etwa $a \in M_1$ (analog bei $a \in M_2$), so muß dann

$$M \in S \rightarrow M \subseteq M_1$$

gelten, also auch $A \subseteq M_1$, im Widerspruch zu $A = M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $M_2 \neq \emptyset$. Also ist A h-zusammenhängend.

Satz 3. *Ist $M \subseteq C_\sigma$ und gibt es für jedes $x, y \in M$ eine h-zusammenhängende Menge $M_{xy} \subseteq M$ mit $x, y \in M_{xy}$, so ist M h-zusammenhängend.*

Beweis. Wäre $M = M_1 \cup M_2$ mit $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in M abgeschlossen und $x \in M_1$, $y \in M_2$, so wäre für ein h-zusammenhängendes M_{xy} : $M_{xy} \cap M_1 \neq \emptyset$, $M_{xy} \cap M_2 \neq \emptyset$, im Widerspruch zu Satz 1.

Aus Satz 2 und 3 folgt der

Satz 4. *S sei eine Menge h-zusammenhängender Mengen $M \subseteq C_\sigma$; es gebe ein $\emptyset \neq M_0 \in S$, so daß für jedes $M \in S$ stets $M_0 \cup M$ h-zusammenhängend ist. Dann ist $\bigcup_{M \in S} M$ h-zusammenhängend.*

Beweis. Ist $x, y \in A = \bigcup_{M \in S} M$ mit etwa $x \in M_1$, $y \in M_2$ ($M_1, M_2 \in S$), so ist $M_0 \cup M_1$ und ebenso $M_0 \cup M_2$ h-zusammenhängend und der Durchschnitt beider nicht leer. Nach Satz 2 ist also die Vereinigung von $M_0 \cup M_1$ und $M_0 \cup M_2$ eine h-zusammenhängende Menge $M_{xy} \subseteq A$ mit $x, y \in M_{xy}$; nach Satz 3 ist dann A h-zusammenhängend.

Satz 5. *Ist $M_1, M_2 \subseteq C_\sigma$; $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $h \in C_\sigma$, $h > 0$; dann gilt*

$$M_1 \cup M_2 \text{ } h\text{-zusammenhängend} \rightarrow \varrho(M_1, M_2) < h,$$

$$\varrho(M_1, M_2) < h \wedge M_1, M_2 \text{ } h\text{-zusammenhängend} \rightarrow M_1 \cup M_2 \text{ } h\text{-zusammenhängend}.$$

Beweis. Ist $A = M_1 \cup M_2$ h-zusammenhängend und $\varrho(M_1, M_2) \geqq h > 0$, so ist wegen $\varrho(M_1, M_2) > 0$: $M_1 \cup M_2 = \emptyset$; ebenso ist wegen $\varrho(M_1, M_2) > 0$:

$$M_1' \cap A \subseteq M_1, \quad M_2' \cap A \subseteq M_2;$$

also M_1, M_2 in A abgeschlossen; also wäre A h-unzusammenhängend, Widerspruch. Ist umgekehrt $\varrho(M_1, M_2) < h$ und M_1, M_2 h-zusammenhängend und wäre $M_1 \cup M_2 = A = M_1^* \cup M_2^*$ mit

$$M_1^*, M_2^* \neq \emptyset;\ M_1^* \cap M_2^* = \emptyset;\ \varrho(M_1^*, M_2^*) \geqq h;$$

M_1^*, M_2^* in A abgeschlossen, so wäre nach Satz 1:

$$M_1 \subseteq M_1^* \vee M_1 \subseteq M_2^*,\ M_2 \subseteq M_1^* \vee M_2 \subseteq M_2^*.$$

Wegen $M_1^*, M_2^* \neq \emptyset$ und $A = M_1^* \cup M_2^*$ gilt: $M_1 \subseteq M_1^* \leftrightarrow M_2 \subseteq M_2^*$; hieraus und wegen $M_1^*, M_2^* \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1^* \cap M_2^* = \emptyset$ folgt schließlich: $(M_1^* = M_1 \wedge M_2^* = M_2) \vee (M_1^* = M_2 \wedge M_2^* = M_1)$; also wäre

$$\varrho(M_1, M_2) = \varrho(M_1^*, M_2^*) \geqq h$$

im Widerspruch zu $\varrho(M_1, M_2) < h$; also ist A h-zusammenhängend.

Für $h = 0$ gilt Satz 5 nur in der Richtung

$$\text{„}M_1 \cup M_2 \text{ 0-zusammenhängend} \rightarrow \varrho(M_1, M_2) = 0\text{“}.$$

„$\varrho(M_1, M_2) = 0 \wedge M_1, M_2$ 0-zusammenhängend $\rightarrow M_1 \cup M_2$ 0-zusammenhängend“ gilt nicht in C_0 — man wähle etwa in C_0: $M_1 = (0, 1)$, $M_2 = (1, 2)$ — aber trivial in C_σ mit $\sigma > 0$, da eine 0-zusammenhängende Menge stets leer oder einelementig ist. Wir haben also noch den

Satz 5′. *Ist* $M_1, M_2 \subseteq C_\sigma$; $\sigma > 0$; $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; *dann gilt*

$$M_1 \cup M_2 \text{ } h\text{-zusammenhängend} \rightarrow \varrho(M_1, M_2) \begin{cases} = 0, \text{ falls } h = 0, \\ < h, \text{ falls } h > 0, \end{cases}$$

$$\varrho(M_1, M_2) \begin{cases} = 0, \text{ falls } h = 0 \\ < h, \text{ falls } h > 0 \end{cases} \wedge M_1, M_2 \text{ } h\text{-zusammenhängend} \rightarrow M_1 \cup M_2 \text{ } h\text{-zusammenhängend}.$$

Satz 6. *Ist* $M \subseteq C_\sigma$, M *h-zusammenhängend*, $M \subseteq M^* \subseteq \boldsymbol{H} M$; *dann ist auch* M^* *h-zusammenhängend.*

Beweis. Wäre M^* h-unzusammenhängend, so gäbe es Mengen $M_1, M_2 \subseteq M^*$ mit: $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M^* = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in M^* abgeschlossen. Wegen $M \subseteq M_1 \cup M_2$ wäre nach Satz 1: $M \subseteq M_1 \vee M \subseteq M_2$. Wegen der Abgeschlossenheit von M_1, M_2 in M^* wäre dann schließlich: $(\boldsymbol{H} M) \cap M^* \subseteq M_1 \vee (\boldsymbol{H} M) \cap M^* \subseteq M_2$, also $M^* \subseteq M_1 \vee M^* \subseteq M_2$, im Widerspruch zu $M^* = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $M_1, M_2 \neq \emptyset$.

Satz 7. *Ist* $\emptyset \neq M \subseteq C_\sigma$, M *h-zusammenhängend bei* $h > 0$,

$$M \subseteq M^* \subseteq U(M, h);$$

dann ist auch M^* *h-zusammenhängend.*

Beweis. Zu jedem $x \in U(M, h)$ gibt es ein $y \in M$ mit $\varrho(x, y) < h$, also nach Satz 5: $\{x, y\}$ h-zusammenhängend. Wir ordnen nun jedem $x \in M^*$ solch ein $y \in M$

zu; es seien weiterhin $x_1, x_2 \in M^*$ und $y_1, y_2 \in M$ die derart den x_1, x_2 zugeordneten Punkte. Dann ist $M \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \subseteq M^*$ und $M \cup \{x_1\} \cup \{x_2\}$ nach Satz 2 h-zusammenhängend (es ist ja $M \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} = (\{y_1, y_2\} \cup M) \cup \{x_1, y_1\} \cup \{x_2, y_2\}$); also nach Satz 3 M^* h-zusammenhängend.

Als Folgerungen aus Satz 7 ergeben sich: Ist $a \in C_\sigma$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$; dann ist jede offene Menge $G \subseteq U(a, \varepsilon)$ ein ε-Gebiet, also speziell $U(a, \varepsilon)$ selbst; jede abgeschlossene Menge $F \subseteq U(a, \varepsilon)$ ist ein ε-Kontinuum. Ist $\emptyset \neq M \subseteq C_\sigma$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, M ε-zusammenhängend; dann ist jede offene Menge $G \subseteq U(M, \varepsilon)$ ein ε-Gebiet, also speziell $U(M, \varepsilon)$ selbst; jede abgeschlossene Menge $F \subseteq U(M, \varepsilon)$ ist ein ε-Kontinuum.

3. Eine endliche Folge $a_0, a_1, \ldots, a_t$ von Punkten $a_\tau \in C_\sigma$ $(0 \leqq \tau \leqq t)$ heißt eine *a_0 und a_t verbindende ε-Kette*, falls $\varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0$ und $\varrho(a_\tau, a_{\tau+1}) < \varepsilon$ $(0 \leqq \tau \leqq t-1)$ gilt. $M \subseteq C_\sigma$ heißt *ε-verbunden*, falls $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ und es für jedes $a, b \in M$ eine a und b verbindende ε-Kette $a = a_0, a_1, \ldots, a_t = b$ gibt mit $a_\tau \in M$ $(0 \leqq \tau \leqq t)$. $M \subseteq C_\sigma$ heißt *h-verkettet*, falls $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ und M für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \geqq h$ ε-verbunden ist. Für $h = 0$ erhält man den klassischen Begriff der verketteten Menge. Für $h > 0$ ist die Definition der h-verketteten Menge identisch mit der Definition: $M \subseteq C_\sigma$ heißt h-verkettet, falls $h \in C_\sigma$, $h > 0$ und jedes $a, b \in M$ durch eine h-Kette innerhalb M verbunden werden kann.

Satz 8. a) *Ist $M \subseteq C_\sigma$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; dann gilt: M h-zusammenhängend $\rightarrow$ M h-verkettet.* b) *Ist $M \subseteq C_\sigma$, $h \in C_\sigma$, $h > 0$; dann gilt: M h-verkettet $\rightarrow$ M h-zusammenhängend.*

Beweis. a) Es sei M nicht h-verkettet. Dann gibt es Punkte $a, b \in M$, die für ein $\varepsilon_0 \in C_\sigma$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \geqq h$ nicht durch eine ε_0-Kette aus M verbunden werden können. M_1 sei die Menge aller Punkte $x \in M$, die mit a durch eine ε_0-Kette aus M verbunden werden können; $M_2 = M \setminus M_1$. Dann gilt: $M_1, M_2 \neq \emptyset$, da $a \in M_1$, $b \in M_2$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in M abgeschlossen. Also wäre M h-unzusammenhängend, Widerspruch. b) Es sei M nicht h-zusammenhängend. Dann gibt es Mengen $M_1, M_2 \subseteq M$ mit $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in M abgeschlossen. Ist nun $x \in M_1$, $y \in M_2$, so ist also $\varrho(x, y) \geqq h$; also sind keine zwei Punkte $x \in M_1$, $y \in M_2$ durch eine h-Kette in M zu verbinden. Da $M_1, M_2 \neq \emptyset$, ist also M nicht h-verkettet, Widerspruch.

4. Wir wenden uns jetzt dem Begriff der h-Komponenten zu. Ist $M \subseteq C_\sigma$, $a \in M$, so heißt für festes $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ die Vereinigung $M_a^{(h)}$ aller h-zusammenhängenden Mengen $M^* \subseteq M$ mit $a \in M^*$ die *h-Komponente von a in M*. $K \subseteq M$ heißt *h-Komponente von M*, falls es ein $a \in M$ gibt mit $K = M_a^{(h)}$. Stets ist $a \in M_a^{(h)}$, also $M_a^{(h)} \neq \emptyset$. Nach Satz 2 ist $M_a^{(h)}$ auch selbst h-zusammenhängend, ist also die größte h-zusammenhängende Menge $M^* \subseteq M$ mit $a \in M^*$. Ist $M \subseteq C_\sigma$, $a \in M$, $b \in M$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so gilt sofort: $M_a^{(h)} = M_b^{(h)} \leftrightarrow M_a^{(h)} \cap M_b^{(h)} \neq \emptyset$. Daraus folgt dann sofort der

Satz 9. *Jede nicht leere Menge $M \subseteq C_\sigma$ zerfällt für festes $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ disjunkt und erschöpfend in ihre h-Komponenten.*

Da für $\varnothing \neq M \subseteq C_\sigma$ jede h-zusammenhängende Menge $M^* \subseteq M$ Teilmenge einer h-Komponente von M ist, so kann man in diesem Sinne die h-Komponenten von M als die größten h-zusammenhängenden Teilmengen von M auffassen. Für C_σ mit $\sigma > 0$ sind die 0-Komponenten einer Menge $\varnothing \neq M \subseteq C_\sigma$ die Einermengen $\{x\}$ mit $x \in M$.

Satz 10. *Ist* $M \subseteq C_\sigma$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *sind* K_1, K_2 *h-Komponenten von* M *mit* $K_1 \neq K_2$; *dann ist* $\varrho(K_1, K_2) \geqq h$.

Beweis. Der Fall $h = 0$ ist trivial. Wäre für $h > 0$ $\varrho(K_1, K_2) < h$, dann gäbe es Punkte $x \in K_1$, $y \in K_2$ mit $\varrho(x, y) < h$; dann wäre aber nach Satz 5 $K_1 \cup K_2$ h-zusammenhängend, also $K_1 \cup K_2 \subseteq K_1, K_2$, also $K_1 \cup K_2 = K_1 = K_2$; Widerspruch zu $K_1 \neq K_2$.

Satz 11. a) *Ist* $M \subseteq C_\sigma$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, K *h-Komponente von* M; *dann ist* K *in* M *abgeschlossen.* b) *Ist* $M \subseteq C_\sigma$, $h \in C_\sigma$, $h > 0$, K *h-Komponente von* M; *dann ist* K *in* M *offen.*

Beweis. a) Nach Satz 6 ist $K \cup (K' \cap M)$ h-zusammenhängend, also $K' \cap M \subseteq K$. Nach Satz 10 ist sofort $(M \setminus K)' \cap M \subseteq M \setminus K$, da kein Häufungspunkt von $M \setminus K$ in K liegen kann.

Aus Satz 11 folgt sofort: Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so ist jede h-Komponente von C_σ ein h-Kontinuum, für $h > 0$ auch noch ein h-Gebiet. Für $h > 0$ ist also die Begrenzung γ_K jeder h-Komponente K von C_σ leer. Man hat weiterhin: Ist $M \subseteq C_0$, M offen bzw. abgeschlossen, $h \in C_0$, $h \geqq 0$; dann ist jede h-Komponente von M ein h-Gebiet bzw. h-Kontinuum. Ist $M \subseteq C_\sigma$, M offen bzw. abgeschlossen, $h \in C_\sigma$, $h > 0$; dann ist jede h-Komponente von M ein h-Gebiet bzw. h-Kontinuum. Da die Menge der h-Komponenten einer offenen Menge $M \subseteq C_\sigma$ ($\sigma = 0$, $h \geqq 0$ oder $\sigma \geqq 0$, $h > 0$) gleichmächtig einer Teilmenge von R_σ ist, gilt noch: Ist $M \subseteq C_0$, M offen, $h \in C_0$, $h \geqq 0$; dann ist M die Vereinigung höchstens $\|\omega_0\|$ vieler disjunkter h-Gebiete. Ist $M \subseteq C_\sigma$, M offen, $h \in C_\sigma$, $h > 0$; dann ist M die Vereinigung höchstens $\|\omega_\sigma\|$ vieler disjukunkter h-Gebiete.

Satz 12. *Ist* $M_1 \subseteq M_2 \subseteq C_\sigma$, $a \in M_1$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; *dann ist* $M_{1a}^{(h)} \subseteq M_{2a}^{(h)}$. *Ist* $M \subseteq C_\sigma$, $a \in M$; $h_1, h_2 \in C_\sigma$; $0 \leqq h_1 \leqq h_2$; *dann ist* $M_a^{(h_1)} \subseteq M_a^{(h_2)}$.

Beweis. $M_{1a}^{(h)}$ ist eine h-zusammenhängende Teilmenge von M_2, die a als Element enthält. Jede h_2-zusammenhängende Menge $M^* \subseteq M$ ist auch h_2-zusammenhängend.

Ein für alle weiteren Betrachtungen grundlegender Satz ist

Satz 13. *Ist* $a \in C_\sigma$, $h \in C_\sigma$, $h > 0$ *und* K *die Menge aller* $x \in C_\sigma$, *für die es ein* $0 < n \in N_0$ *gibt mit* $a - n \cdot h \leqq x \leqq a + n \cdot h$ — *also* $K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh, a + nh \rangle$ —; *dann ist* $K = C_{\sigma a}^{(h)}$.

Beweis. Es sind $\{a \pm n \cdot h\}, \left\{a \pm n \cdot h \pm \frac{h}{2}\right\}$ h-zusammenhängend als einpunktige Mengen; also sind nach Satz 7 h-zusammenhängend:

$$\left\langle a + n \cdot h, a + n \cdot h + \frac{h}{2} \right\rangle, \left\langle a + n \cdot h + \frac{h}{2}, a + (n+1) \cdot h \right\rangle,$$

$$\left\langle a - n \cdot h - \frac{h}{2}, a - n \cdot h \right\rangle, \left\langle a - (n+1) \cdot h, a - n \cdot h - \frac{h}{2} \right\rangle;$$

also sind nach Satz 2 auch h-zusammenhängend: $\langle a + n \cdot h, a + (n+1)h\rangle$, $\langle a - (n+1)h, a - n \cdot h\rangle$. Man erhält dann induktiv über Satz 2, daß für $n > 0$ $\langle a - n \cdot h, a + n \cdot h\rangle$ h-zusammenhängend ist und damit dann schließlich auch K (nach Satz 2), also $K \subseteq C_{\sigma a}{}^{(h)}$. Wäre nun $C_{\sigma a}{}^{(h)} \setminus K \neq \emptyset$, so wäre $\varrho(K, C_{\sigma a}{}^{(h)} \setminus K) \geqq h$ (da für $x \in K, y \in C_\sigma \setminus K$ gilt: $\varrho(x,y) \geqq h$), also nach Satz 5: $C_{\sigma a}{}^{(h)} = K \cup (C_{\sigma a}{}^{(h)} \setminus K)$ ist h-unzusammenhängend; Widerspruch; also $C_{\sigma a}{}^{(h)} \subseteq K$, also $K = C_{\sigma a}{}^{(h)}$.

Für $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ sei $\bar{\delta}(h)$ die obere Grenze aller $n \cdot h$ bei $n \in N_0$ und $\delta(h)$ die untere Grenze aller $\dfrac{1}{n+1} \cdot h$ bei $n \in N_0$.

Satz 14. *a) Ist $h \in C_0$, $h \geqq 0$ und K eine h-Komponente von C_0; dann ist $K = C_0$.* *b) Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$ und K eine h-Komponente von C_σ; dann gilt: Es gibt $u, v \in U_\sigma$ mit $-\infty_\sigma < u < v < +\infty_\sigma$ und $K = (u,v)$. Es ist*

$$\varrho(K, C_\sigma \setminus K) = \delta(K) > 0 \text{ und } \delta(K) = \bar{\delta}(h).$$

Beweis. a) folgt aus Satz 16a. b) Es gibt ein $a \in C_\sigma$ mit

$$K = C_{\sigma a}{}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - n \cdot h, a + n \cdot h\rangle.$$

Dann ist $a - \omega h < x < a + \omega h$ für alle $x \in K$, also K beschränkt. u, v sind dann die untere bzw. obere Grenze von K. $\delta(K)$ ist die obere Grenze aller $\varrho(x,y)$ mit $x, y \in K$, also $n \cdot h \leqq \delta(K)$; für jedes $x, y \in K$ gibt es aber ein $n_0 \in N_0$ mit

$$x, y \in \langle a - n_0 h, a + n_0 h\rangle,$$

also $\varrho(x,y) \leqq 2n_0 \cdot h$, also $\delta(K) = \bar{\delta}(h)$; damit ist auch $\delta(K) > 0$. Wäre $\varrho(K, C_\sigma \setminus K) < \delta(K)$, so gäbe es Punkte $x \in K$, $y \in C_\sigma \setminus K$ mit $\varrho(x,y) < \delta(K)$; es gibt dann ein $n_0 \in N_0$ mit $\varrho(x,y) \leqq n_0 \cdot h$, also auch ein $n_1 \in N_0$ mit

$$x, y \in \langle a - n_1 h, a + n_1 h\rangle,$$

also $y \in K$; Widerspruch. Wäre $\varrho(K, C_\sigma \setminus K) > \delta(K)$, so wähle man ein $y \in C_\sigma$ mit $\varrho(K, C_\sigma \setminus K) > y > \delta(K)$ und ein $x \in K$; dann ist $x + y \in C_\sigma \setminus K$ und

$$\varrho(x, x+y) < \varrho(K, C_\sigma \setminus K),$$

da ja $\varrho(x, x+y) = y$ und $\varrho(K, C_\sigma \setminus K) > y > \delta(K)$ ist. Also ist schließlich $\varrho(K, C_\sigma \setminus K) = \delta(K)$.

Satz 15. *Ist $h_1, h_2 \in C_\sigma$; $\sigma > 0$; $h_1, h_2 > 0$; K_1 h_1-Komponente von C_σ und K_2 h_2-Komponente von C_σ mit $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$; dann gilt*

a) $K_1 = K_2 \leftrightarrow \underline{\delta}(h_2) < h_1 < \bar{\delta}(h_2) = \delta(K_2)$,

b) $K_1 = K_2 \leftrightarrow \underline{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2) \leftrightarrow \delta(K_1) = \bar{\delta}(h_1) = \bar{\delta}(h_2) = \delta(K_2)$.

Beweis. Wegen $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ gibt es ein $a \in C_\sigma$ mit $K_1 = C_{\sigma a}{}^{(h_1)}$, $K_2 = C_{\sigma a}{}^{(h_2)}$; nach Satz 13 ist außerdem $K_1 = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh_1, a + nh_1\rangle$, $K_2 = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh_2,$

$a + nh_2\rangle$. a) Es sei $K_1 = K_2$. Wäre $h_1 < \underline{\delta}(h_2)$, so wäre $h_1 < \frac{h_2}{n}$ für jedes $0 < n \in N_0$, also $n \cdot h_1 < h_2$, also $\langle a - nh_1, a + nh_1\rangle \subset \langle a - h_2, a + h_2\rangle$, also $K_1 \subset K_2$; Widerspruch. Wäre $\overline{\delta}(h_2) < h_1$, so wäre $n \cdot h_2 < h_1$ für jedes $n \in N_0$, also für $n > 0$: $\langle a - nh_2, a + nh_2\rangle \subset \langle a - h_1, a + h_1\rangle$, also $K_2 \subset K_1$; Widerspruch. Also ist $\underline{\delta}(h_2) < h_1 < \overline{\delta}(h_2)$, da $h_1 \in C_\sigma$ und $\underline{\delta}(h_2), \overline{\delta}(h_2) \in U_\sigma$. Ist umgekehrt $\underline{\delta}(h_2) < h_1 < \overline{\delta}(h_2)$, so gibt es $n^*, n^{**} \in N_0$ mit $\frac{h_2}{n^*} \leqq h_1$ oder $h_2 \leqq n^* h_1$ und mit $h_1 \leqq n^{**} h_2$; dann gibt es ein $0 < n_0 \in N_0$ (nämlich $n_0 = \max(n^*, n^{**})$) mit $h_2 \leqq n_0 h_1$ und $h_1 \leqq n_0 h_2$. Für jedes $0 < n \in N_0$ gilt also

$$\langle a - nh_2, a + nh_2\rangle \subseteq \langle a - nn_0h_1, a + nn_0h_1\rangle$$

und

$$\langle a - nh_1, a + nh_1\rangle \subseteq \langle a - nn_0h_2, a + nn_0h_2\rangle;$$

also ist $K_2 \subseteq K_1 \wedge K_1 \subseteq K_2$, also $K_1 = K_2$. b) Es sei $K_1 = K_2$. Dann gilt nach a): $\underline{\delta}(h_2) < h_1 < \overline{\delta}(h_2)$, $\underline{\delta}(h_1) < h_2 < \overline{\delta}(h_1)$; es gibt also ein $0 < n_0 \in N_0$ mit $\frac{h_2}{n_0} \leqq h_1 \leqq n_0 h_2$, $\frac{h_1}{n_0} \leqq h_2 \leqq n_0 h_1$. Für jedes $0 < n \in N_0$ gilt demnach:
$\underline{\delta}(h_2) \leqq \frac{h_2}{n_0 \cdot n} \leqq \frac{h_1}{n}$, $\underline{\delta}(h_1) \leqq \frac{h_1}{n_0 \cdot n} \leqq \frac{h_2}{n}$, $n \cdot h_1 \leqq nn_0 \cdot h_2 \leqq \overline{\delta}(h_2)$,
$n \cdot h_2 \leqq nn_0 \cdot h_1 \leqq \overline{\delta}(h_1)$. Also ist $\underline{\delta}(h_2) \leqq \underline{\delta}(h_1)$, $\underline{\delta}(h_1) \leqq \underline{\delta}(h_2)$, $\overline{\delta}(h_1) \leqq \overline{\delta}(h_2)$, $\overline{\delta}(h_2) \leqq \overline{\delta}(h_1)$, also $\underline{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2)$, $\overline{\delta}(h_1) = \overline{\delta}(h_2)$. Ist umgekehrt $\underline{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2)$ $[\overline{\delta}(h_1) = \overline{\delta}(h_2)]$, so ist $\underline{\delta}(h_2) \leqq \underline{\delta}(h_1)$, $\underline{\delta}(h_1) \leqq \underline{\delta}(h_2)$ $[\overline{\delta}(h_1) \leqq \overline{\delta}(h_2), \overline{\delta}(h_2) \leqq \overline{\delta}(h_1)]$. Es gibt also ein $0 < n_0 \in N_0$ mit $\frac{h_2}{n_0} \leqq \frac{h_1}{1}$ oder $h_2 \leqq n_0 h_1$ und mit $\frac{h_1}{n_0} \leqq \frac{h_2}{1}$ oder $h_1 \leqq n_0 h_2$ $\left[\text{mit } h_1 \leqq n_0 h_2 \text{ oder } \frac{h_1}{n_0} \leqq h_2 \text{ und mit } h_2 \leqq n_0 h_1 \text{ oder } \frac{h_2}{n_0} \leqq h_1\right]$; dann ist $\overline{\delta}(h_2) \leqq \overline{\delta}(h_1)$ und $\overline{\delta}(h_1) \leqq \overline{\delta}(h_2)$ $[\underline{\delta}(h_1) \leqq \underline{\delta}(h_2)$ und $\underline{\delta}(h_2) \leqq \underline{\delta}(h_1)]$, also $\overline{\delta}(h_1) = \overline{\delta}(h_2)$ $[\underline{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2)]$. Insgesamt haben wir schließlich

$$\underline{\delta}(h_2) = \underline{\delta}(h_1) < h_1 < \overline{\delta}(h_1) = \overline{\delta}(h_2)$$

und damit nach a): $K_1 = K_2$.

Die $\underline{\delta}(h_1)$, $\underline{\delta}(h_2)$, $\overline{\delta}(h_1)$, $\overline{\delta}(h_2)$ aus Satz 15 sind Elemente von U_σ und verschieden von $\pm\infty_\sigma$.

Satz 16. a) *Die 0-zusammenhängenden Mengen $M \subseteq C_0$ sind genau die folgenden:* $\emptyset$; $\{a\}$ *für* $a \in C_0$; $\langle a, b\rangle$, (a, b), $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ *bei* $a, b \in D_0$ *und* $a < b$. b) *Es sei* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$. *Dann ist jede h-zusammenhängende Menge $M \subseteq C_\sigma$ in einer h-Komponente von C_σ enthalten. Für $\sigma > 0$ sind die 0-zusammenhängenden Mengen genau $\emptyset$ und $\{a\}$ bei $a \in C_\sigma$. Ist $\sigma > 0$, $h > 0$ und $K = (u, v)$ eine h-Komponente von C_σ, so sind h-zusammenhängende Mengen $M \subseteq K$ die folgenden:*

$\emptyset$; $\{a\}$ *für* $a \in K$; $\langle a, b\rangle$, (a, b), $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ *bei* $a, b \in D_\sigma$ *und* $u \leqq a < b \leqq v$.

Beweis. a) ist bekannt aus der klassischen Topologie. Für b) brauchen wir nur noch zu zeigen, daß die letztaufgeführten Mengen h-zusammenhängend sind. Die Fälle $\emptyset$ und $\{a\}$ sind trivial. Für die anderen Mengen genügt es nach Satz 3 zu zeigen: $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma$ und $u < a < b < v$ ist h-zusammenhängend. Wäre $\langle a, b\rangle$ h-unzusammenhängend, so gäbe es Mengen $M_1, M_2 \subseteq \langle a, b\rangle$ mit: $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $\langle a, b\rangle = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in $\langle a, b\rangle$ abgeschlossen. Ist $a, b \in M_1$, so bilde man die Mengen $M_1^* = (K \setminus \langle a, b\rangle) \cup M_1$ und $M_2^* = M_2$; dann ist $M_1^*, M_2^* \neq \emptyset, M_1^* \cap M_2^* = \emptyset, K = M_1^* \cup M_2^*, \varrho(M_1^*, M_2^*) \geqq h$ (sonst gäbe es $x \in M_1^*, y \in M_2^*$ mit $\varrho(x, y) < h$, was aber wegen $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$ unmöglich ist) und M_1^*, M_2^* in K abgeschlossen. Ist $a \in M_1$, $b \in M_2$, so bilde man die Mengen $M_1^* = (u, a) \cup M_1$ und $M_2^* = (b, v) \cup M_2$; dann ist $M_1^*, M_2^* \neq \emptyset, M_1^* \cap M_2^* = \emptyset$, $K = M_1^* \cup M_2^*, \varrho(M_1^*, M_2^*) \geqq h$ und M_1^*, M_2^* in K abgeschlossen. Dual erledigen sich die Fälle $a, b \in M_2$ und $a \in M_2$, $b \in M_1$. Stets erhält man den Widerspruch, daß K h-unzusammenhängend ist.

Satz 17. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, sind K_1 und K_2 h-Komponenten von C_σ und ist $a \in K_1$; dann gilt $\varrho(a, K_2) = \varrho(K_1, K_2)$.*

Beweis. Die Fälle $\sigma = 0$ und $\sigma \geqq 0$, $h = 0$ sind trivial. Sei also $h > 0$. Wegen $a \in K_1$ ist sofort $\varrho(K_1, K_2) \leqq \varrho(a, K_2)$. Es ist noch $\varrho(a, K_2) \leqq \varrho(K_1, K_2)$ zu zeigen, wofür nachzuweisen genügt, daß es zu jedem $x \in K_1$, $y \in K_2$ ein $z \in K_2$ gibt mit $\varrho(a, z) \leqq \varrho(x, y)$. Man bestimme z einfach durch $x - y = a - z$, also $z = (a - x) + y$. Dann ist wegen $y \in K_2$ und $|a - x| < n_0 h$ für ein $n_0 \in N_0$ auch $z \in K_2$ und $\varrho(a, z) = |a - z| = |x - y| = \varrho(x, y)$.

Satz 18. *Ist für festes $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ $\mathfrak{R}^{(h)}$ die Menge aller h-Komponenten von C_σ, dann gilt: Für $\sigma = 0$ ist $\overline{\overline{\mathfrak{R}^{(h)}}} = 1$, für $\sigma > 0$, $h > 0$ ist $\overline{\overline{\mathfrak{R}^{(h)}}} = \|\omega_\sigma\|$. Ist $K_1, K_2 \in \mathfrak{R}^{(h)}$ bei $\sigma > 0, h > 0$ mit $K_1 \neq K_2$, so ist $\delta(K_1) = \delta(K_2) = \bar{\delta}(h)$, $\varrho(K_1, K_2) \geqq \bar{\delta}(h)$ und $\varrho(K_1, K_2) \in U_\sigma$.*

Beweis. $\overline{\overline{\mathfrak{R}^{(h)}}} = 1$ folgt aus Satz 14a. Für $\sigma > 0$, $h > 0$ ist zunächst $\overline{\overline{\mathfrak{R}^{(h)}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$, da in jeder h-Komponente ein rationaler Punkt $r \in R_\sigma$ liegt. Man ordne nun jeder h-Komponente eine Schranke $k \in C_\sigma$, $k > 0$ zu mit $-k \leqq x \leqq k$ für alle Elemente x dieser Komponente. Wäre dann $\overline{\overline{\mathfrak{R}^{(h)}}} < \|\omega_\sigma\|$, so wäre die Menge dieser k beschränkt, also $\bigcup_{K \in \mathfrak{R}} K \subset C_\sigma$; Widerspruch. $\delta(K_1) = \delta(K_2) = \bar{\delta}(h)$ folgt aus Satz 14b. Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, so ist nach Satz 13 $K_1 = C_{\sigma a}{}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh, a + nh\rangle$, $K_2 = C_{\sigma b}{}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle b - nh, b + nh\rangle$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K_1 < K_2$ (im Sinne der natürlichen Anordnung der $K \in \mathfrak{R}^{(h)}$), dann ist $\varrho(K_1, K_2)$ die untere Grenze aller $\varrho(a + nh, b - nh)$ für $n \in N_0$, also $\varrho(K_1, K_2) \in U_\sigma$.

Man nenne für $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ s eine h-Strecke, falls 1) $s = \{a\}$ ist bei $a \in C_\sigma$ oder falls 2) für $h = 0$ $s = \langle a, b\rangle$ ist bei $a, b \in C_\sigma$, $a < b$ und $\langle a, b\rangle \subseteq K$, wo K eine h-Komponente von C_σ ist, oder falls 3) für $h > 0$ $s = \langle a_0, b_0\rangle \cup \langle a_1, b_1\rangle \cup \cdots \cup \langle a_n, b_n\rangle$ ist bei $a_r, b_r \in C_\sigma$ $(0 \leqq r \leqq n \in N_0)$, $a_r < b_r < a_{r+1}$, $(a_{r+1} - b_r) < h$ und $\langle a_r, b_r\rangle \subseteq K$, wo K eine für alle r feste h-Komponente von C_σ ist.

Satz 19. *Ist $G \subseteq C_\sigma$, G offen, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; dann ist G ein h-Gebiet genau dann, wenn sich stets je zwei Punkte $a, b \in G$ durch eine ganz in G gelegene h-Strecke verbinden lassen.*

Beweis. (←) Sätze 3, 5, 16. (→) Ist $a, b \in G$ und lassen sich a und b nicht durch eine in G gelegene h-Strecke verbinden, so sei G_1 die Menge aller $x \in G$, die sich mit a durch eine in G gelegene h-Strecke verbinden lassen; $G_2 = G \setminus G_1$. Dann ist $G_1, G_2 \neq \emptyset$ ($a \in G_1$, $b \in G_2$), $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G = G_1 \cup G_2$. Es ist auch $\varrho(G_1, G_2) \geqq h$, da dies für $h = 0$ trivial ist und für $h > 0$ gilt: Sind $x \in G_1$, $y \in G_2$ und $\varrho(x, y) < h$, so wäre mit x auch y mit a durch eine in G gelegene h-Strecke zu verbinden, was ein Widerspruch ist. Schließlich sind G_1, G_2 in G abgeschlossen; also ist G h-unzusammenhängend; Widerspruch.

§ 11 Algebraische Struktur der linearen Komponenten

1. Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so bezeichne man mit $\mathfrak{K}^{(h)}$ die Menge aller h-Komponenten von C_σ; die *Nullkomponente* $A^{(h)}$ sei dasjenige $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $0 \in K$. Sind $h_1, h_2 \in C_\sigma$, $h_1, h_2 \geqq 0$, so heiße $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ (*unmittelbarer*) *Vorgänger* von $\mathfrak{K}^{(h_2)}$ bzw. $\mathfrak{K}^{(h_2)}$ (*unmittelbarer*) *Nachfolger* von $\mathfrak{K}^{(h_1)}$, falls für jedes $K_1 \in \mathfrak{K}^{(h_1)}$ und $K_2 \in \mathfrak{K}^{(h_2)}$ mit $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ gilt:

1) $K_1 \subset K_2$.

2) Es gibt kein $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so daß für ein $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ gilt: $K_1 \subset K \subset K_2$.

Dies ist gleichbedeutend damit, daß für die Nullkomponenten $A^{(h_1)}$, $A^{(h_2)}$ gilt:

1) $A^{(h_1)} \subset A^{(h_2)}$.

2) Es gibt kein $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so daß $A^{(h_1)} \subset A^{(h)} \subset A^{(h_2)}$ ist.

(Vgl. dazu Satz 15 aus § 10.)

Dies ist für $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ gleichbedeutend damit, daß gilt

$$\bar{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2);$$

d. h., für jedes $n, m \in N_0$, $m > 0$ ist $nh_1 < \frac{1}{m} h_2$, und es gibt kein $h \in C_\sigma$ mit $nh_1 < h < \frac{1}{m} h_2$ für jedes $n, m \in N_0$, $m > 0$.

Es gibt in C_σ zu jedem $\mathfrak{K}^{(h)}$ höchstens einen Nachfolger und höchstens einen Vorgänger; denn ist $A^{(h)} \subset A^{(h_1)}$, $A^{(h)} \subset A^{(h_2)}$ und gibt es keine Zwischenkomponenten, so ist wegen $A^{(h_1)} \subseteq A^{(h_2)} \vee A^{(h_2)} \subseteq A^{(h_1)}$ schließlich $A^{(h_1)} = A^{(h_2)}$; ist analog $A^{(h_1)} \subset A^{(h)}$, $A^{(h_2)} \subset A^{(h)}$ und gibt es keine Zwischenkomponenten, so ist wie eben $A^{(h_1)} = A^{(h_2)}$. Wir zeigen im folgenden, daß es in C_σ bei $\sigma > 0$ zu jedem $\mathfrak{K}^{(h)}$ mit $h > 0$ einen Nachfolger und einen Vorgänger gibt.

Satz 1. *Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$; dann gibt es Zahlen $h_1, h_2 \in C_\sigma$; $h_1, h_2 > 0$ mit*

$$\bar{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h), \quad \bar{\delta}(h) = \underline{\delta}(h_2).$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für rationale $h \in R_\sigma$, $h > 0$ zu beweisen, da ja für $h \in C_\sigma$, $h > 0$ etwa $\underline{\delta}(h) = \underline{\delta}(r)$ und $\bar{\delta}(h) = \bar{\delta}(r)$ ist bei $r \in R_\sigma$ und $h \leqq r \leqq 2h$. Ist also nun $h \in R_\sigma$, $h > 0$; dann läßt sich h darstellen in der Form

$h = \dfrac{\sum\limits_{i \leqq m_1} \omega^{\alpha_i} a_i}{\sum\limits_{i \leqq m_2} \omega^{\beta_i} b_i}$, wo die Summen CANTORsche Normalformen ganzer Ordinalzahlen aus G_σ sind und $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ ist. Wir wählen jetzt $h_1 = \dfrac{\omega^{\alpha_0}}{\omega^{\beta_0+1}}$, $h_2 = \dfrac{\omega^{\alpha_0+1}}{\omega^{\beta_0}}$. Dann ist für $n, m \in N_0$, $m > 0$: $nh_1 < \dfrac{h}{m}$, $nh < \dfrac{h_2}{m}$ (wegen $n\,\omega^{\alpha_0} \cdot m \sum \omega^{\beta_i} b_i < \omega^{\beta_0+1} \sum \omega^{\alpha_i} a_i$, $n \sum \omega^{\alpha_i} a_i \cdot m\,\omega^{\beta_0} < \omega^{\alpha_0+1} \sum \omega^{\beta_i} b_i$); also $\bar{\delta}(h_1) \leqq \underline{\delta}(h)$, $\bar{\delta}(h) \leqq \underline{\delta}(h_2)$; es ist noch zu zeigen $\bar{\delta}(h_1) \not< \underline{\delta}(h)$, $\bar{\delta}(h) \not< \underline{\delta}(h_2)$. Wäre $\bar{\delta}(h_1) < \underline{\delta}(h) \vee \bar{\delta}(h) < \underline{\delta}(h_2)$, so gäbe es ein $r \in R_\sigma$, $r > 0$ mit

$$\bar{\delta}(h_1) < r < \underline{\delta}(h) \vee \bar{\delta}(h) < r < \underline{\delta}(h_2);$$

es sei $r = \dfrac{\sum\limits_{i \leqq n_1} \omega^{\gamma_i} c_i}{\sum\limits_{i \leqq n_2} \omega^{\delta_i} d_i}$ mit $c_0 > 0$, $d_0 > 0$ (wieder CANTORsche Normalformen). Dann wäre für jedes $n, m \in N_0$, $m > 0$: I) $nh_1 < r < \dfrac{h}{m}$ oder für dieselben n, m: II) $nh < r < \dfrac{h_2}{m}$. I) hat zur Folge:

$$n\omega^{\alpha_0} \cdot \sum \omega^{\delta_i} d_i < \omega^{\beta_0+1} \cdot \sum \omega^{\gamma_i} c_i \wedge m \cdot \sum \omega^{\beta_i} b_i \cdot \sum \omega^{\gamma_i} c_i < \sum \omega^{\delta_i} d_i \cdot \sum \omega^{\alpha_i} a_i,$$

also $\alpha_0 + \delta_0 \leqq \beta_0 + \gamma_0 \wedge \beta_0 + \gamma_0 < \alpha_0 + \delta_0$; Widerspruch. II) hat zur Folge:

$$n \cdot \sum \omega^{\alpha_i} a_i \cdot \sum \omega^{\delta_i} d_i < \sum \omega^{\gamma_i} c_i \cdot \sum \omega^{\beta_i} b_i \wedge m\omega^{\beta_0} \cdot \sum \omega^{\gamma_i} c_i < \omega^{\alpha_0+1} \cdot \sum \omega^{\delta_i} d_i,$$

also $\alpha_0 + \delta_0 < \beta_0 + \gamma_0 \wedge \beta_0 + \gamma_0 \leqq \alpha_0 + \delta_0$; Widerspruch. Also ist

$$\delta(h_1) = \underline{\delta}(h) \wedge \bar{\delta}(h) = \underline{\delta}(h_2).$$

Aus Satz 1 folgt sofort

Satz 2. *Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$; dann gibt es $h_1, h_2 \in C_\sigma$ mit $h_1, h_2 > 0$, so daß $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ Vorgänger von $\mathfrak{K}^{(h)}$ und $\mathfrak{K}^{(h_2)}$ Nachfolger von $\mathfrak{K}^{(h)}$ ist.*

Aus dem Beweis von Satz 1 entnimmt man noch, daß in C_σ bei $\sigma > 0$ die Komponentenmengen

$$\ldots, \mathfrak{K}^{\left(\frac{1}{\omega^n}\right)}, \ldots, \mathfrak{K}^{\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}, \mathfrak{K}^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}, \mathfrak{K}^{(1)}, \mathfrak{K}^{(\omega)}, \mathfrak{K}^{(\omega^2)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(\omega^n)}, \ldots$$

bei $n \in N_0$ unmittelbar einander folgen bzw. vorhergehen. Für $h_1, h_2 \in C_\sigma$, $h_1, h_2 \geqq 0$ kann man die Beziehung „$\mathfrak{K}^{(h_1)} < \mathfrak{K}^{(h_2)}$“ definieren als $A^{(h_1)} \subset A^{(h_2)}$. „$<$“ ist dann eine irreflexive Ordnung in der Menge aller $\mathfrak{K}^{(h)}$ aus C_σ. Für $\sigma > 0$, $h > 0$ besitzt sogar jedes $\mathfrak{K}^{(h)}$ einen unmittelbaren Vorgänger und einen unmittelbaren Nachfolger.

2. Satz 3. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; dann ist $\mathfrak{K}^{(h)}$ in bezug auf die natürliche Anordnung der $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ geordnet.*

Beweis. Es ist also $K_1 < K_2$ ($K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(h)}$) genau dann, wenn gilt

$$x \in K_1 \wedge y \in K_2 \to x < y.$$

Dann ist trivial $K \not< K$ ($K \neq \emptyset$, also etwa $a \in K$; dann aber nie $a < a$). Es ist trivial: $K_1 < K_2 \wedge K_2 < K_3 \to K_1 < K_3$ (ist $a \in K_2$, dann ist mit $x \in K_1$, $y \in K_3$ und $x < a < y$ auch $x < y$). Es gilt auch: $K_1 < K_2 \vee K_1 = K_2 \vee K_2 < K_1$; ist nämlich $K_1 \neq K_2$, so $K_1 \cap K_2 = \emptyset$; sei für $h > 0$ (für $h = 0$ Behauptung trivial) $K_1 = (u_1, v_1)$, $K_2 = (u_2, v_2)$ bei $u_1, u_2, v_1, v_2 \in U_\sigma$, so kann wegen $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ nur gelten: $v_1 \leqq u_2 \vee v_2 \leqq u_1$; also $K_1 < K_2 \vee K_2 < K_1$.

Ist $\mathfrak{V}_\sigma$ die Menge aller Vereinigungsmengen von Mengen $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$, so ist sofort $[\mathfrak{V}_\sigma, \cap, \cup, \emptyset, C_\sigma]$ eine vollständige atomistische Boolesche Algebra mit Null- und Einselement, deren Atome gerade die h-Komponenten von C_σ sind.

3. Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so definiere man für $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(h)}$ die *Summe* $K_1 + K_2$ als dasjenige $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit: $x \in K_1, y \in K_2 \to x + y \in K$. Wir zeigen, daß dies eine sinnvolle Definition ist. Sind $a \in K_1$, $b \in K_2$, so gibt es genau ein $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $a + b \in K$; dann ist für $h > 0$:

$$K_1 = C_{\sigma a}{}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh, a + nh \rangle,$$

$$K_2 = C_{\sigma b}{}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle b - nh, b + nh \rangle,$$

$$K = C_{\sigma(a+b)}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle (a + b) - nh, (a + b) + nh \rangle.$$

Ist $x \in K_1$, $y \in K_2$, so gibt es ein $0 < n_0 \in N_0$ mit

$$x \in \langle a - n_0 h, a + n_0 h \rangle,\ y \in \langle b - n_0 h, b + n_0 h \rangle;$$

dann ist $(a + b) - 2n_0 h \leqq x + y \leqq (a + b) + 2n_0 h$, also $(x + y) \in K$. Für C_0, $h = 0$ ist $\mathfrak{K}^{(h)} = \{C_0\}$, und für C_σ, $\sigma > 0$, $h = 0$ ist jede h-Komponente einelementig; für diese Fälle ist also die Behauptung trivial.

Ist $K_1 + K_2 = K$, so gibt es für jedes $z \in K$, $x \in K_1$ ein $y \in K_2$ mit $x + y = z$; es ist nämlich für gewisse $b \in K_2$, $c \in K$: $x + b = c$; dann ist aber

$$|z - c| \leqq \delta(K) = \delta(K_1) = \delta(K_2),$$

also $x + [b + (z - c)] = c + (z - c) = z$, wobei $b + (z - c) \in K_2$.

Satz 4. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so ist $[\mathfrak{K}^{(h)}, +, <, \Lambda^{(h)}]$ — $+, <, \Lambda^{(h)}$ seien die Addition, Ordnungsbeziehung und das Nullelement in $\mathfrak{K}^{(h)}$ — eine geordnete abelsche Gruppe; d. h., es gelten für die Elemente aus $\mathfrak{K}^{(h)}$ die Gesetze:*

I. Axiome der Ordnung.

(1) $K \not< K$,

(2) $K_1 < K_2 \wedge K_2 < K_3 \to K_1 < K_3$,

(3) $K_1 < K_2 \vee K_1 = K_2 \vee K_2 < K_1$.

II. Axiome der Addition.

(1) $K_1 + (K_2 + K_3) = (K_1 + K_2) + K_3$,

(2) $K_1 + K_2 = K_2 + K_1$,

(3) $K + \Lambda^{(h)} = K$,

(4) Zu jedem K gibt es genau ein $(-K)$ mit $K + (-K) = \Lambda^{(h)}$,

(5) $K_1 < K_2 \to K_1 + K < K_2 + K$.

Beweis. I folgt aus Satz 3. II: (1) Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, $c \in K_3$, so liegt der Punkt $a + (b + c) = (a + b) + c$ sowohl in $K_1 + (K_2 + K_3)$ als auch in $(K_1 + K_2) + K_3$; also $K_1 + (K_2 + K_3) = (K_1 + K_2) + K_3$. (2) Ist $a \in K_1, b \in K_2$, so liegt $a + b = b + a$ in $K_1 + K_2$ und in $K_2 + K_1$; also $K_1 + K_2 = K_2 + K_1$. (3) Ist $a \in K$, so gilt wegen $0 \in \Lambda^{(h)}$ und $a + 0 = a$: a liegt in K und in $K + \Lambda^{(h)}$; also $K + \Lambda^{(h)} = K$. (4) Ist $a \in K$, so ist $a + (-a) = 0$; sei $(-a) \in K'$, so ist $K + K' = \Lambda^{(h)}$. Gäbe es noch ein K'' mit $K + K'' = \Lambda^{(h)}$, so wäre $K + K' = K + K''$, also $K' + (K + K') = K' + (K + K'')$. also $(K' + K) + K' = (K' + K) + K''$, also $\Lambda^{(h)} + K' = \Lambda^{(h)} + K''$, also $K' = K''$. (5) Gilt für alle $x \in K_1$, $y \in K_2$: $x < y$, so gilt auch für alle $x \in K_1$, $y \in K_2$ und festes $c \in K$: $x + c < y + c$. Da sich jedes Element von $K_1 + K$ bzw. $K_2 + K$ als solche Summe $x + c$ bzw. $y + c$ darstellen läßt bei festem c, gilt also $K_1 + K < K_2 + K$.

4. Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so definiere man für $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und $r \in R_0$ das *Produkt* $K \cdot r = r \cdot K$ als dasjenige $L \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit: $x \in K \to r \cdot x \in L$. Wir zeigen, daß dies eine sinnvolle Definition ist. Sind $a \in K$, $r \in R_0$, so gibt es genau ein $L \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $r \cdot a \in L$; dann ist für $h > 0$: $K = C_{\sigma a}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh, a + nh \rangle$, $L = C_{\sigma(ra)}^{(h)} = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle ra - nh, ra + nh \rangle$. Ist $x \in K$, so gibt es ein $0 < n_0 \in N_0$ mit $x \in \langle a - n_0 h, a + n_0 h \rangle$; dann ist $ra - n_0 rh \overset{\leqq}{\leqq} rx \overset{\leqq}{\leqq} ra + n_0 rh$; da $|n_0 r| < n_1 \in N_0$ für ein $0 < n_1 \in N_0$, ist also $rx \in K$. Für C_0, $h = 0$ ist $\mathfrak{K}^{(h)} = \{C_0\}$, und für C_σ, $\sigma > 0$, $h = 0$ ist jede h-Komponente einelementig; für diese Fälle ist also die Behauptung trivial.

Ist $r \cdot K = L$, $r \neq 0$, so gibt es für jedes $y \in L$ ein $x \in K$ mit $r \cdot x = y$. Für C_0, $h = 0$ und C_σ, $\sigma > 0$, $h = 0$ ist dies trivial mit $x = \frac{y}{r}$. Für $h > 0$ sei $K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh, a + nh \rangle$, $L = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle ar - nh, ar + nh \rangle$. Wäre $x = \frac{y}{r} \notin K$, so wäre $x < a - nh$ für alle $n \in N_0$ oder $x > a + nh$ für alle $n \in N_0$; dann ist aber $y = rx \lesseqgtr ra - rnh$ oder $y = rx \gtreqless ra + rnh$ (jeweils für alle $n \in N_0$). Nach dem Archimedischen Axiom in R_0 ist aber dann $y \lesseqgtr ra \mp nh$ oder $y \gtreqless ra \pm nh$, also $y < ra - nh$ oder $y > ra + nh$ (jeweils für alle $n \in N_0$); also $y \notin L$; Widerspruch.

Satz 5. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so bildet $\mathfrak{K}^{(h)}$ über dem Körper R_0 der (endlichen) rationalen Zahlen einen Vektorraum; d. h., es gelten für die Elemente $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und $r \in R_0$ die Gesetze:*

I. Axiome der Addition.

(1) $K_1 + K_2 = K_2 + K_1$,

(2) $K_1 + (K_2 + K_3) = (K_1 + K_2) + K_3$,

(3) Für jedes K, K_1 gibt es genau ein K_2 mit $K = K_1 + K_2$.

II. Axiome der Multiplikation.

(1) $1 \cdot K = K$,

(2) $r \cdot (s \cdot K) = (r \cdot s) \cdot K$,

(3) $(r + s) \cdot K = r \cdot K + s \cdot K$, $r \cdot (K_1 + K_2) = r \cdot K_1 + r \cdot K_2$.

Beweis. I folgt aus Satz 4. II: (1) Ist $a \in K$, so auch $1 \cdot a \in K$, also $1 \cdot K = K$. (2) Ist $a \in K$, so $r(sa) = (rs)\,a$, also $r \cdot (s \cdot K) = (r \cdot s) \cdot K$. (3) Ist $a \in K$, so $(r + s)a = ra + sa$, also $(r + s) \cdot K = r \cdot K + s \cdot K$. Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, so $r(a + b) = ra + rb$, also $r \cdot (K_1 + K_2) = r \cdot K_1 + r \cdot K_2$.

Hinsichtlich der Ordnungsbeziehungen „$<$“ in $\mathfrak{K}^{(h)}$ und R_0 gelten noch die Gesetze:

Satz 6. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so gelten in dem Vektorraum $\mathfrak{K}^{(h)}$ über R_0 die Monotoniegesetze*:

(1) $K_1 < K_2 \wedge r \gtrless 0 \to r \cdot K_1 \lesseqgtr r \cdot K_2$,

(2) $r < s \wedge K \gtrless \Lambda^{(h)} \to r \cdot K \lesseqgtr s \cdot K$.

Beweis. (1) Wenn $K_1 < K_2$, so gilt: $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2 \to x_1 < x_2$. Ist nun $r \gtrless 0$, so gibt es zu jedem $y_1 \in r \cdot K_1$, $y_2 \in r \cdot K_2$ ein $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ mit $y_1 = rx_1$, $y_2 = rx_2$; wegen $x_1 < x_2$ ist dann aber $y_1 \lesseqgtr y_2$, also $r \cdot K_1 \lesseqgtr r \cdot K_2$. (2) Für C_0 und C_σ, $\sigma > 0$, $h = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei $a \in K$, dann ist $a \gtrless 0$ für $K \gtrless \Lambda^{(h)}$, also $ar \lesseqgtr as$. Für $h > 0$ ist $r \cdot K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle ar - nh,\ ar + nh \rangle$, $s \cdot K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle as - nh, as + nh \rangle$; es genügt zu zeigen: $ar + nh < as - mh$ für alle $n, m \in N_0$ bzw. $as + nh < ar - mh$ für alle $n, m \in N_0$, also zu zeigen: $ar + nh < as$ bzw. $as + nh < ar$ (jeweils für alle $n \in N_0$). Wäre im Falle $ar < as$ für ein $n_0 \in N_0$: $ar + n_0 h \geqq as$, so wäre doch $ar < as \leqq ar + n_0 h$, also $0 < as - ar = (s - r)\,a \leqq n_0 h$. Im Falle $as < ar$ hätte man für ein $n_1 \in N_0$: $as + n_1 h \geqq ar$, also $as < ar \leqq as + n_1 h$, also $0 < ar - as = (r - s)a \leqq n_1 h$. In beiden Fällen gäbe es also ein $t \in R_0$, $t \neq 0$ mit $t \cdot a \in \Lambda^{(h)}$, also $t \cdot K = \Lambda^{(h)}$. Dann gibt es aber für $0 \in \Lambda^{(h)}$ wegen $t \neq 0$ ein $x \in K$ mit $t \cdot x = 0$, wobei $x = 0$ sein muß; es wäre demnach $0 \in K$, also $K = \Lambda^{(h)}$; Widerspruch.

Es ist $0 \cdot K = \Lambda^{(h)}$, $r \cdot \Lambda^{(h)} = \Lambda^{(h)}$; also kann man in (1) und (2) von Satz 6 noch $\gtrless$ und $\lesseqgtr$ ersetzen durch $\geqq$ und $\leqq$. Aus Satz 6 folgt sofort:

$r \neq 0 \wedge r \cdot K_1 = r \cdot K_2 \to K_1 = K_2$, $\quad K \neq \Lambda^{(h)} \wedge r \cdot K = s \cdot K \to r = s$,

$r > 0 \wedge r \cdot K_1 < r \cdot K_2 \to K_1 < K_2$, $\quad K > \Lambda^{(h)} \wedge r \cdot K < s \cdot K \to r < s$,

$r < 0 \wedge r \cdot K_1 < r \cdot K_2 \to K_1 > K_2$, $\quad K < \Lambda^{(h)} \wedge r \cdot K < s \cdot K \to r > s$,

$K \neq \Lambda^{(h)} \wedge r \cdot K = K \to r = 1$, $\quad r \cdot K = \Lambda^{(h)} \to r = 0 \vee K = \Lambda^{(h)}$.

5. Da $\mathfrak{K}^{(h)}$ eine abelsche Gruppe ist, kann man die *Differenz* $K_1 - K_2$ definieren als $K_1 + (-K_2)$. Es ist dann sofort $K_1 - K_2 = \Lambda^{(h)} \leftrightarrow K_1 = K_2$.

Satz 7. *Ist* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *so gelten in dem Vektorraum* $\mathfrak{K}^{(h)}$ *über* R_0 *die Gesetze*:

(1) $K_1 < K_2 \leftrightarrow -K_1 > -K_2$,

(2) $K < \Lambda^{(h)} \leftrightarrow -K > \Lambda^{(h)}$,

(3) $(-1)\cdot K = -K$,

(4) $(-r)\cdot K = r\cdot(-K) = -(r\cdot K)$, $(-r)\cdot(-K) = r\cdot K$.

Beweis. (1) $K_1 < K_2 \leftrightarrow K_1 - (K_1 + K_2) < K_2 - (K_1 + K_2) \leftrightarrow -K_2 < -K_1$. (2) ist Spezialfall von (1) wegen $-\Lambda^{(h)} = \Lambda^{(h)}$. (3) $(-1)\cdot K + 1\cdot K = (-1+1)\cdot K = 0\cdot K = \Lambda^{(h)}$, also $(-1)\cdot K = -K$. (4) $(-r)\cdot K = (r\cdot(-1))\cdot K = r\cdot((-1)\cdot K) = r\cdot(-K)$, $-(r\cdot K) = (-1)\cdot(r\cdot K) = ((-1)\cdot r)\cdot K = (-r)\cdot K$.
$(-r)\cdot(-K) = (-r)\cdot((-1)\cdot K) = ((-r)\cdot(-1))\cdot K = r\cdot K$.

Man definiere in $\mathfrak{K}^{(h)}$ den *Betrag* $|K|$ als K, falls $K \geqq \Lambda^{(h)}$, als $-K$, falls $K < \Lambda^{(h)}$. Für $a \in K$ ergibt sich sofort $|a| \in |K|$. Wie üblich beweist man dann den

Satz 8. *Ist* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *so gelten in dem Vektorraum* $\mathfrak{K}^{(h)}$ *über* R_0 *die Gesetze*:

(1) $|K| \geqq \Lambda^{(h)}$, $|K| = \Lambda^{(h)} \leftrightarrow K = \Lambda^{(h)}$,

(2) $|-K| = |K|$,

(3) $|K_1 + K_2| \leqq |K_1| + |K_2|$, $|K_1 + K_2| = |K_1| + |K_2| \leftrightarrow K_1, K_2 \geqq \Lambda^{(h)} \vee K_1, K_2 \leqq \Lambda^{(h)}$,

(4) $|r\cdot K| = |r|\cdot|K|$,

(5) $||K_1| - |K_2|| \leqq |K_1 - K_2| \leqq |K_1| + |K_2|$.

Mit dem Betrag läßt sich in $\mathfrak{K}^{(h)}$ eine *Metrik* $\varrho^*(K_1, K_2) = |K_1 - K_2|$ einführen, für die gilt

$$\varrho^*(K_1, K_2) \geqq \Lambda^{(h)},\ \varrho^*(K_1, K_2) = \Lambda^{(h)} \leftrightarrow K_1 = K_2,$$

$$\varrho^*(K_1, K_2) = \varrho^*(K_2, K_1),\ \varrho^*(K_1, K_2) + \varrho^*(K_2, K_3) \geqq \varrho^*(K_1, K_3).$$

Satz 9. *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, *sind* $K, K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(\cdot)}$ *mit* $K = (u, v)$; *dann gilt*

$$\varrho^*(K_1, K_2) = K \leftrightarrow \begin{cases} 0 = \varrho(K_1, K_2) \wedge v = \delta(K_1 \cup K_2), & \text{falls } K = \Lambda^{(h)}, \\ u = \varrho(K_1, K_2) \wedge v = \delta(K_1 \cup K_2), & \text{falls } K \neq \Lambda^{(h)}. \end{cases}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, den Satz für $K_1 \leqq K_2$ zu beweisen. Für $K_1 = K_2$ ist die Behauptung trivial, da dann

$$\delta(K_1 \cup K_2) = \delta(K_1) = \bar{\delta}(h) = v.$$

Nun zu $K_1 < K_2$. ($\rightarrow$) $\varrho^*(K_1, K_2) = K_2 - K_1 = K > \Lambda^{(h)}$. Dann gilt für jedes $x \in K_1$, $y \in K_2$: $\varrho(x, y) = y - x \in K$; also $u \leqq \varrho(K_1, K_2)$ und $\delta(K_1 \cup K_2) \leqq v$. Ist $z \in K$ beliebig vorgegeben, so gibt es Elemente $x \in K_1$, $y \in K_2$ mit $y - x = z$,

also $\varrho(x, y) = z$; also $\varrho(K_1, K_2) \leqq u$ und $v \leqq \delta(K_1 \cup K_2)$; also $u = \varrho(K_1, K_2)$, $v = \delta(K_1 \cup K_2)$. ($\leftarrow$) Wegen $K_1 < K_2$ ist $\varrho(K_1, K_2) \neq 0$, also $K \neq \Lambda^{(h)}$. Ist nun $u = \varrho(K_1, K_2)$, so gibt es Punkte $x \in K_1$, $y \in K_2$ mit $\varrho(x, y) = y - x = z \in K$; also $\varrho^*(K_1, K_2) = K_2 - K_1 = K$.

Unter den Voraussetzungen von Satz 9 gilt:

$$u \leqq \varrho(K_1, K_2) < v \rightarrow \varrho^*(K_1, K_2) = K,$$

$$u < \delta(K_1 \cup K_2) \leqq v \rightarrow \varrho^*(K_1, K_2) = K;$$

denn jedesmal gibt es Punkte $x \in K_1$, $y \in K_2$ mit $\varrho(x, y) = |x - y| = z \in K$, also $\varrho^*(K_1, K_2) = |K_1 - K_2| = K$. Über Satz 9 gilt also (unter denselben Voraussetzungen) weiter:

$$u \leqq \varrho(K_1, K_2) < v \quad \leftrightarrow u < \delta(K_1 \cup K_2) \leqq v,$$

$$u \leqq \varrho(K_1, K_2) < v \quad \leftrightarrow \begin{cases} 0 = \varrho(K_1, K_2), \text{ falls } K = \Lambda^{(h)}, \\ u = \varrho(K_1, K_2), \text{ falls } K \neq \Lambda^{(h)}, \end{cases}$$

$$u < \delta(K_1 \cup K_2) \leqq v \leftrightarrow v = \delta(K_1 \cup K_2),$$

$$K_1 \neq K_1 \rightarrow u \leqq \varrho(K_1, K_2) < v \leftrightarrow u = \varrho(K_1, K_2).$$

6. Wir relativieren jetzt die bisher durchgeführten strukturellen Betrachtungen. Es sei $h, h_1 \in C_\sigma$ mit $h \geqq h_1 \geqq 0$. Ist $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$, so bezeichne man mit $\mathfrak{K}_K{}^{(h_1)}$ die Menge aller $L \in \mathfrak{K}^{(h_1)}$ mit $L \subseteq K$. Wir studieren nun die strukturellen Eigenschaften der $\mathfrak{K}_K{}^{(h_1)}$ bei $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$. Zunächst ist bei $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und $K_1 \neq K_2$: $\mathfrak{K}_{K_1}{}^{(h_1)} \cap \mathfrak{K}_{K_2}{}^{(h_1)} = \varnothing$. Außerdem gibt es für jedes $L \in \mathfrak{K}^{(h_1)}$ ein $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $L \subseteq K$ (da L auch h-zusammenhängend ist); also dann $L \in \mathfrak{K}_K{}^{(h_1)}$ für dieses K. Es ist weiterhin $\bigcup \mathfrak{K}_K{}^{(h_1)} = K$; also ist $\mathfrak{K}_K{}^{(h_1)}$ die eindeutig bestimmte disjunkte und erschöpfende Einteilung von K in seine h_1-Komponenten. Wegen $\Lambda^{(h_1)} \subseteq \Lambda^{(h)}$ ist $\Lambda^{(h_1)} \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$.

Man erhält sofort: Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und $\mathfrak{B}_{\sigma K}$ die Menge aller Vereinigungsmengen von Mengen $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_K{}^{(h_1)}$; dann ist $[\mathfrak{B}_{\sigma K}, \cap, \cup, \varnothing, K]$ eine vollständige, atomistische Boolesche Algebra mit Null- und Einselement, deren Atome gerade die h_1-Komponenten von K sind.

Satz 10. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$; dann ist $\left[\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}, +, <, \Lambda^{(h_1)}\right]$ eine geordnete abelsche Gruppe.*

Beweis. Nach Satz 4 muß nur noch gezeigt werden:

$$K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}} \rightarrow K_1 + K_2 \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}} \quad \text{und} \quad K \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}} \rightarrow (-K) \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}.$$

Dies folgt aber sofort aus $\Lambda^{(h)} + \Lambda^{(h)} = \Lambda^{(h)}$ und $-\Lambda^{(h)} = \Lambda^{(h)}$.

Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, so erhält man aus den Gruppeneigenschaften von $\mathfrak{K}^{(h)}$ und $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ weiterhin: Die Mengen $\mathfrak{K}_K{}^{(h_1)}$ bei $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ sind die Nebenklassen der Untergruppe $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ der Gruppe $\mathfrak{K}^{(h_1)}$.

Satz 11. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, so bildet $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ über dem Körper R_0 der (endlichen) rationalen Zahlen einen Vektorraum.*

Beweis. Nach Satz 5 und Satz 10 muß nur noch gezeigt werden: $r \in R_0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}} \to r \cdot K \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$. Dies folgt aber sofort aus $r \cdot \Lambda^{(h)} = \Lambda^{(h)}$.

Es gelten dann für $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ weiterhin dieselben Gesetze, wie sie im Anschluß an Satz 5 für $\mathfrak{K}^{(h)}$ entwickelt wurden, einschließlich der Möglichkeit der Einführung einer Metrik $\varrho^*(K_1, K_2)$ für $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$, die im Überschneidungsgebiet mit der in $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ eingeführten Metrik ϱ^* übereinstimmt.

7. Es sei $h, h_1 \in C_\sigma$ und $\bar{\delta}(1) > h \geqq h_1 \geqq 0$. Für Elemente $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ definiere man dann das *Produkt* $K_1 \cdot K_2$ als dasjenige $K \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ mit: $x \in K_1$, $y \in K_2 \to x \cdot y \in K$. Wir zeigen, daß dies eine sinnvolle Definition ist. Für C_0 und für C_σ, $h = 0$ ist die Behauptung trivial; es sei also nun $h > 0$. Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, so gibt es genau eine h_1-Komponente K mit $a \cdot b \in K$. Es ist $K \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$: Wegen $a, b \in \Lambda^{(h)}$ ist ja für ein $0 < n_0 \in N_0$: $|a|, |b| < n_0 h$; dann ist also $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| < (n_0^2 \cdot n_1) h$ mit $h < n_1 \in N_0$; also $a \cdot b \in \Lambda^{(h)}$, also $K \subseteq \Lambda^{(h)}$, also $K \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$. Für $h_1 = 0$ ist die Definition damit sinnvoll. Nun zu $h_1 > 0$. Dann ist $K_1 = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - n h_1, a + n h_1 \rangle$, $K_2 = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle b - n h_1, b + n h_1 \rangle$, $K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a \cdot b - n h_1, a \cdot b + n h_1 \rangle$. Ist $x \in K_1$, $y \in K_2$, so gibt es ein $0 < n_0 \in N_0$ mit $x \in \langle a - n_0 h_1, a + n_0 h_1 \rangle$, $y \in \langle b - n_0 h_1, b + n_0 h_1 \rangle$, also $a - n_0 h_1 \leqq x \leqq a + n_0 h_1$, $b - n_0 h_1 \leqq y \leqq b + n_0 h_1$. Ist $K_1 = \Lambda^{(h_1)} \vee K_2 = \Lambda^{(h_1)}$, so gilt:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| < \begin{cases} n_1 h_1 |y| \leqq n_1 h_1 (|b| + n_0 h_1) \\ n_1 h_1 |x| \leqq n_1 h_1 (|a| + n_0 h_1) \end{cases} \Bigg\} \begin{array}{l} < n_1 h_1 (n_2 h + n_0 h_1) \leqq \\ \leqq n_1 h_1 (n_2 + n_0) h < \\ < n_1 h_1 (n_2 + n_0) n_3 = \\ = n_1 n_3 (n_2 + n_0) h_1 \end{array}$$

bei $|x| < n_1 h_1 \vee |y| < n_1 h_1$; $|a|, |b| < n_2 h$; $h < n_3$. Es ist also $|x \cdot y| < m h_1$ für ein $0 < m \in N_0$, also $x \cdot y \in \Lambda^{(h_1)}$ für beliebiges $x \in K_1$, $y \in K_2$, also auch $a \cdot b \in \Lambda^{(h_1)}$, also $x \cdot y \in K$. Wir dürfen jetzt voraussetzen: $K_1 \neq \Lambda^{(h_1)} \wedge K_2 \neq \Lambda^{(h_1)}$. Ist $K_1, K_2 > \Lambda^{(h_1)} \vee K_1, K_2 < \Lambda^{(h_1)}$, so ist

$$(a - n_0 h_1) \cdot (b - n_0 h_1) \leqq xy \leqq (a + n_0 h_1) \cdot (b + n_0 h_1) \vee \cdots \geqq xy \geqq \cdots,$$

also

$$ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 h_1 - (a + b)) \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 h_1 (a + b)) \vee \cdots \geqq xy \geqq \cdots$$

$$ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 h_1 - n_2 h) \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 h_1 + n_2 h)$$

$$\vee\, ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 h_1 + n_2 h) \geqq xy \geqq ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 h_1 - n_2 h)$$

bei $|a + b| < n_2 h$. Für $h < n_3$ ist dann

$$ab + n_0 h_1 \cdot (-n_2 n_3) \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 + n_2) n_3$$

$$\vee\, ab + n_0 h_1 \cdot (n_0 + n_2) n_3 \geqq xy \geqq ab + n_0 h_1 \cdot (-n_2 n_3),$$

also für $m = n_0 n_3 (n_0 + n_2)$: $ab - mh_1 \leqq xy \leqq ab + mh_1$, also $x \cdot y \in K$. Nun die Fälle $K_1 < \Lambda^{(h_1)} \wedge K_2 > \Lambda^{(h_1)}$ und $K_1 > \Lambda^{(h_1)} \wedge K_2 < \Lambda^{(h_1)}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit behandeln wir nur den Fall $K_1 < \Lambda^{(h_1)} \wedge K_2 > \Lambda^{(h_1)}$. Es ist dann

$$(a - n_0 h_1)(b + n_0 h_1) \leqq (a - n_0 h_1) y \leqq xy \leqq x(b - n_0 h_1) \leqq (a + n_0 h_1)(b - n_0 h_1),$$

also

$$ab + n_0 h_1 \cdot (-n_0 h_1) - (b - a)) \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 \cdot (-n_0 h_1 + (b - a)),$$

also für $b - a < n_2 h$:

$$ab + n_0 h_1 \cdot (-n_0 h_1 - n_2 h) \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 \cdot (-n_0 h_1 + n_2 h),$$

also $ab + n_0 h_1 \cdot (-n_0 - n_2) h \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 \cdot (n_2 h)$, also für $h < n_3$: $ab - n_0 h_1 \cdot (n_0 + n_2)\, n_3 \leqq xy \leqq ab + n_0 h_1 (n_2 n_3)$, also für $m = n_0 n_3 (n_0 + n_2)$: $ab - mh_1 \leqq xy \leqq ab + mh_1$, also $x \cdot y \in K$.

Satz 12. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\bar{\delta}(1) > h \geqq h_1 \geqq 0$; *dann ist* $\left[\mathfrak{R}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}, +, \cdot, \Lambda^{(h_1)}\right]$ *ein* (*kommutativer*) *Ring.*

Beweis. Nach Satz 10 braucht nur noch gezeigt zu werden für die Elemente von $\mathfrak{R}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$:

$$(1)\ K_1 \cdot K_2 = K_2 \cdot K_1,\ (2)\ K_1 \cdot (K_2 \cdot K_3) = (K_1 \cdot K_2) \cdot K_3,$$

$$(3)\quad K \cdot (K_1 + K_2) = K \cdot K_1 + K \cdot K_2.$$

Dies folgt so: (1) Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, so $a \cdot b \in K_1 \cdot K_2$ und $b \cdot a \in K_2 \cdot K_1$, also $K_1 \cdot K_2 = K_2 \cdot K_1$ wegen $ab = ba$. (2) Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, $c \in K_3$, so $K_1 (K_2 K_3) \ni \ni a(bc) = (ab)c \in (K_1 K_2) K_3$. (3) Ist $c \in K$, $a \in K_1$, $b \in K_2$, so $K(K_1 + K_2) \ni \ni c(a + b) = ca + cb \in K K_1 + K K_2$.

In dem Ring aus Satz 12 gilt dann wie üblich noch $\Lambda^{(h_1)} \cdot K = \Lambda^{(h_1)}$ und $(-K_1) K_2 = -K_1 K_2$. Ist $1 \in \Lambda^{(h)}$, so besitzt der Ring $\mathfrak{R}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ ein Einselement $I^{(h_1)}$ (diejenige h_1-Komponente, in der 1 liegt). Dann ist $I^{(h_1)} \cdot K = K$, und bei genügend kleinem h_1 ist auch $I^{(h_1)} \neq \Lambda^{(h_1)}$. Der Ring besitzt im allgemeinen Nullteiler; z. B. sei $h = 1$, $h_1 = \frac{1}{\omega^2}$ gewählt (für C_σ mit $\sigma > 0$), und K sei die h_1-Komponente, in der $\frac{1}{\omega}$ liegt. Dann ist für $n, m \in N_0$ stets $\frac{n}{\omega^2} < \frac{1}{\omega} - m \frac{1}{\omega^2}$ (denn: $\frac{n}{\omega^2} < \frac{\omega - m}{\omega^2}$ wegen $n < \omega - m$), also $K > \Lambda^{(h_1)}$; aber $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega^2} \in \Lambda^{(h_1)}$, also $K \cdot K = \Lambda^{(h_1)}$. Es gilt also i. a. kein Monotoniegesetz $K_1 < K_2 \wedge K \gtrless \Lambda^{(h_1)} \to K_1 \cdot K \lesseqgtr K_2 \cdot K$. (Für $K_1 = \Lambda^{(h_1)}$, $K = K_2 =$ eben konstruierte h_1-Komponente K, die $\frac{1}{\omega}$ enthält, ergibt sich ja $\Lambda^{(h_1)} < K \wedge K > \Lambda^{(h_1)} \wedge \Lambda^{(h_1)} \cdot K = K \cdot K = \Lambda^{(h_1)}$.) Es gelten aber die *abgeschwächten Monotoniegesetze:*

$$K_1 < K_2 \wedge K \gtrless \Lambda^{(h_1)} \to K_1 \cdot K \lessapprox K_2 \cdot K.$$

(Denn für $a \in K_1, b \in K_2, c \in K$ gilt $a < b \wedge c \geqq 0$, also $ac \leqq bc$, also $K_1 K \gtrless K_2 K$, also $K_1 K \leqq K_2 K$.)

Satz 13. *Für C_σ mit $\sigma > 0$ ist* $\left[\mathfrak{R}_{\Lambda^{(1)}}^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}, +, \cdot, <, \Lambda^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}, I^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\right]$ *ein geordneter (kommutativer) Ring mit Einselement.*

Beweis. Nach Satz 12 und den anschließenden Bemerkungen ist noch zu zeigen: $K_1, K_2, K \in \mathfrak{R}_{\Lambda^{(1)}}^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}$, $K_1 < K_2$, $K \geqq \Lambda^{\left(\frac{1}{\omega}\right)} \to K_1 \cdot K \neq K_2 \cdot K$. Ist $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2$, $b \in K$, so ist $a_1 b \leqq a_2 b$ (da $b \geqq 0$ und $a_1 < a_2$). Wäre $K_1 K = K_2 K$, so $|a_2 b - a_1 b| < n_0 \frac{1}{\omega}$ für ein $0 < n_0 \in N_0$, also $(a_2 - a_1) < n_0 \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{|b|}$. Wegen $K_1 < K_2$ ist aber $(a_2 - a_1) > n \frac{1}{\omega}$ für jedes $n \in N_0$; es muß also auch $n_0 \frac{1}{\omega} \frac{1}{|b|} > n \frac{1}{\omega}$ sein oder $n_0 > |b|\, n$ oder $|b| < \frac{n_0}{n+1}$ für jedes $n \in N_0$; also $|b| < \underline{\delta}(1) = \bar{\delta}\left(\frac{1}{\omega}\right)$ (vgl. den Beweis zu Satz 1), also $|b| \in \Lambda^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}$, also $b \in \Lambda^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}$, also $K = \Lambda^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}$; Widerspruch.

8. Satz 14. *Ist $h \in C_\sigma$, $\underline{\delta}(1) > h \geqq 0$ und $\mathfrak{R}$ die Menge aller h-Komponenten von $\Lambda^{(1)}$, deren jede ein Element $r \in R_0$ enthält; dann ist* $[\mathfrak{R}, +, \cdot, <, \Lambda^{(h)}, I^{(h)}]$ *ein geordneter (kommutativer) Körper.*

Beweis. Es gilt: $R_1, R_2 \in \mathfrak{R} \to R_1 + R_2, R_1 \cdot R_2 \in \mathfrak{R}$; $R \in \mathfrak{R} \to (-R) \in \mathfrak{R}$. Wegen $\underline{\delta}(1) > h$ ist $\Lambda^{(h)} < I^{(h)}$, also $\Lambda^{(h)} \neq I^{(h)}$. Ist $R \in \mathfrak{R}$ und $R \neq \Lambda^{(h)}$, so gibt es genau ein $R^{-1} \in \mathfrak{R}$ mit $R \cdot R^{-1} = I^{(h)}$. Ist $R_1 < R_2 \wedge R > \Lambda^{(h)}$, so ist $R_1 \cdot R < R_2 \cdot R$; denn es ist ja $R_1 R \leqq R_2 R$; wäre aber $R_1 R = R_2 R$, so wegen $R \neq \Lambda^{(h)}$ auch $R_1 = R_2$; Widerspruch.

Die Elemente $R \in \mathfrak{R}$ enthalten jedes genau ein $r \in R_0$; denn wäre $r, s \in R_0$, $r, s \in R \in \mathfrak{R}$ mit $r \neq s$, so wäre $|r - s| = t \in R_0$ mit $t > 0$ und $t < n_0 h$ für ein $0 < n_0 \in N_0$; dann ist aber wegen $h < \underline{\delta}(1)$ auch $t < \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in N_0$ oder $t \cdot n < 1$ für alle $n \in N_0$, was ein Widerspruch zum Archimedischen Axiom in R_0 ist.

Ist $R = R_1 \cdot R_2$ und $R_1 \neq \Lambda^{(h)}$, so gibt es zu jedem $z \in R$, $x \in R_1$ ein $y \in R_2$ mit $z = x \cdot y$. Es ist ja $R_2 = R \cdot R_1^{-1}$; wenn dann $z \in R$, $x \in R_1$, so ist $x^{-1} \in R^{-1}$, also $z \cdot x^{-1} = y \in R_2$ mit $z = x \cdot y$.

§ 12 Topologische Struktur der linearen Komponenten

1. Wir wenden uns zunächst den Überdeckungssätzen für lineare Komponenten zu. Ist $h \in C_\sigma$, $h > 0$ und $K \in \mathfrak{R}^{(h)}$, so ist für $a \in K$ und beliebiges $\varepsilon \in C_\sigma$ mit $\underline{\delta}(h) < \varepsilon < \bar{\delta}(h)$: $K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - n\varepsilon, a + n\varepsilon \rangle$. Daraus folgt sofort

Satz 1. *Ist $h \in C_\sigma$, $h > 0$, $K \in \mathfrak{R}^{(h)}$; dann gibt es für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\underline{\delta}(h) < \varepsilon < \bar{\delta}(h)$ ein ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon$ über K; d. h. eine Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ von Intervallen $\langle a, b \rangle \subseteq K$ mit $b - a = \varepsilon$*

derart, daß zwei Intervalle aus $\mathfrak{N}_\varepsilon$ höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben und $K \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon$ gilt.

Satz 2 (Lindelöfscher Überdeckungssatz). *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und ist jedem Punkt x einer beliebigen Menge $M \subseteq K$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ mit $\varepsilon_x > \underline{\delta}(h)$ zugeordnet, dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\mathfrak{N}$ solcher Umgebungen mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

Beweis. Es genügt, den Fall $h > 0$ zu beweisen. Man zerlege M in $\|\omega_0\|$ viele Teilmengen $M_n (n \in N_0)$, die definiert sind zu

$$x \in M_n \leftrightarrow \frac{h}{n+1} < \varepsilon_x \wedge \forall\, \nu \left(0 \leqq \nu < n \rightarrow \varepsilon_x \leqq \frac{h}{\nu+1}\right).$$

Es ist sofort $M \subseteq \bigcup_{n \in N_0} M_n$. Es genügt also zu zeigen, daß jedes M_n durch höchstens abzählbar viele $U(x, \varepsilon_x)$ überdeckt werden kann. Man bilde dazu ein $\frac{h}{2(n+1)}$-Netz über K. M_n wird dann von höchstens $\|\omega_0\|$ vielen Intervallen $\langle a, b\rangle$ dieses Netzes überdeckt. Jedem Intervall $\langle a,b\rangle$ des Netzes mit $\langle a,b\rangle \cap M_n \neq \varnothing$ ordne man genau einen Punkt $y \in M_n \cap \langle a,b\rangle$ zu; es ist sofort $\langle a,b\rangle \subseteq U(y, \varepsilon_y)$; also läßt sich M_n durch höchstens $\|\omega_0\|$ viele solcher $U(y, \varepsilon_y)$ überdecken.

Für C_0 ist $\underline{\delta}(h) = 0$ und Satz 2 ist der klassische Lindelöfsche Überdeckungssatz.

Der Heine-Borelsche Überdeckungssatz für Komponenten, das folgende zweite Überdeckungsaxiom, gilt nicht für $\sigma > 0$.

Zweites Überdeckungsaxiom. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$, ist $a, b \in K$ mit $a < b$ und ist jedem Punkt $x \in \langle a, b\rangle$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \epsilon_x)$ mit $\varepsilon_x > \underline{\delta}(h)$ zugeordnet, so gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{N}$ solcher Umgebungen mit $\langle a,b\rangle \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

Für $\sigma = 0$ hat man in diesem Axiom den klassischen Heine-Borelschen Satz für Intervalle. Für eine äquivalente Formulierung des zweiten Überdeckungsaxiomes definieren wir (r_n/s_n) als *klassische rationale Intervallschachtelung in C_σ*, falls (r_n/s_n) ein Folgenpaar $[(r_n), (s_n)]$ vom Typus ω_0 ist mit $r_n, s_n \in R_0$ und

$$n_1 < n_2 \rightarrow r_{n_1} \leqq r_{n_2} \wedge s_{n_2} \leqq s_{n_1},$$

$$r_n \leqq s_n,$$

$$\varepsilon \in R_0 \wedge \varepsilon > 0 \rightarrow \exists\, N \forall\, n\, (n \geqq N \rightarrow |r_n - s_n| < \varepsilon).$$

Satz 3. *Das zweite Überdeckungsaxiom gilt für C_σ genau dann, wenn es zu jeder klassischen rationalen Intervallschachtelung (r_n/s_n) in C_σ mit $0 \leqq r_0 \leqq s_0 \leqq 1$ einen Punkt $x_0 \in \langle 0{,}1\rangle$ gibt mit $r_n \leqq x_0 \leqq s_n$ für jedes $n \in N_0$.*

Beweis. ($\rightarrow$) G sei die obere Grenze aller r_n, g die untere Grenze aller s_n. Ist $G < g$ oder $G = g \in C_\sigma$, so sind wir fertig. Ist $G = g \in U_\sigma$, so gibt es eine echt monoton wachsende Teilfolge $(r_n{}^*)$ von (r_n) und eine echt monoton fallende Teilfolge $(s_n{}^*)$ von (s_n), die beide $G = g$ als obere bzw. untere Grenze haben. Ist nun $x \in \langle 0{,}1\rangle$ und gibt es ein $r_n{}^*$ (ein $s_n{}^*$) mit $x \leqq r_n{}^*$ ($s_n{}^* \leqq x$), so sei $r_{n_x}{}^*$ ($s_{n_x}{}^*$) das kleinste $r_n{}^*$ (größte $s_n{}^*$) mit $x \leqq r_n{}^*$ ($s_n{}^* \leqq x$). Man ordne dann x die Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ mit $\varepsilon_x = r^*_{n_x+1} - r_{n_x}{}^*$ bzw. $\varepsilon_x = s_{n_x}{}^* - s^*_{n_x+1}$ zu. Dann läßt sich $\langle 0{,}1\rangle$ aber nicht durch endlich viele solche Umgebungen überdecken im Widerspruch zum

zweiten Überdeckungsaxiom (etwa bei $h = 1$); also ist nie $G = g \in U_\sigma$. ($\leftarrow$). Es genügt, den Fall $h > 0$ zu betrachten. Es sei $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$; $a, b \in K$, $a < b$. Jedem Punkt $x \in \langle a, b\rangle$ ist eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ mit $\varepsilon_x > \underline{\delta}(h)$ zugeordnet. M sei die Menge aller $x \in \langle a, b\rangle$, so daß sich $\langle a, x\rangle$ durch endlich viele Umgebungen überdecken läßt; $M \neq \emptyset$; G sei die obere Grenze von M. Zu zeigen ist $G = b$. Ist $a < G < b$ und $G \in C_\sigma$, so erhält man einen Widerspruch wie beim klassischen Beweis des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes. Für $a < G < b$ und $G \in D_\sigma$ erhalten wir folgendermaßen einen Widerspruch: Für $n \in N_0$ teile man $\langle a, b\rangle$ in $(n + 1)$ gleiche Teile der Länge $\dfrac{1}{n+1}(b - a)$. Dann gibt es für jedes n genau ein Teilintervall $\langle a_n, b_n\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ der Länge $\dfrac{1}{n+1}(b - a)$ mit $a_n \leqq G \leqq b_n$. Zu jedem dieser a_n, b_n gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $k_n, l_n \in N_0$ mit $a_n = a + \dfrac{k_n}{n+1}(b - a)$ und $b_n = a + \dfrac{l_n}{n+1}(b - a)$. Dann ist (r_n/s_n) mit $(r_n) = \left(\dfrac{k_n}{n+1}\right)$, $(s_n) = \left(\dfrac{l_n}{n+1}\right)$ eine klassische rationale Intervallschachtelung in C_σ mit $0 \leqq r_0 \leqq s_0 \leqq 1$. Also gibt es nach Voraussetzung ein $x_0 \in \langle 0{,}1\rangle$ mit $r_n \leqq x_0 \leqq s_n$ für alle $n \in N_0$. Es ist dann sofort $a_n \leqq a + x_0(b - a) \leqq b_n$. Die Umgebung $U(y_0, \varepsilon_{y_0})$ bei $y_0 = a + x_0(b - a)$ enthält für ein geeignetes $n_0 \in N_0$ die Punkte a_{n_0} und b_{n_0} (hier wird verwendet, daß a und b in derselben Komponente K gelegen sind), so daß es also wegen $a_{n_0} \leqq G \leqq b_{n_0}$ noch oberhalb G Punkte $x \in M$ gibt, was ein Widerspruch zur Konstruktion von M ist.

Satz 4. *Zu jedem $\varrho \in R_\sigma$ mit $|\varrho| < \bar{\delta}(1)$ gibt es ein $r \in R_0$ und ein $0 < p \in N_0$ mit $|\varrho - r| < \dfrac{p}{\omega}$.*

Beweis. Der Fall $\varrho = 0$ ist trivial (man wähle $r = 0$). Für $\varrho \neq 0$ sei mit Cantorschen Normalformen

$$\varrho = \frac{\sum\limits_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} a_i}{\sum\limits_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} b_i}.$$

Aus $|\varrho| < \bar{\delta}(1)$ folgt sofort: $\alpha_0 \leqq \beta_0$, da bei $\alpha_0 > \beta_0$ für kein $n \in N_0$ gilt: $\omega^{\alpha_0}|a_0| < n\omega^{\beta_0}|b_0|$. Es sei nun $r = \dfrac{g}{h}$ bei $g, h \in G_0$, $h \neq 0$ und $0 < p \in N_0$. Für $|\varrho - r| < \dfrac{p}{\omega}$ muß also gelten

$$\left| \frac{h \sum\limits_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} a_i - g \sum\limits_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} b_i}{h \sum\limits_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} b_i} \right| < \frac{p}{\omega}$$

oder

$$\omega \left| h \sum_{i \leqq n} \omega^{\alpha_i} a_i - g \sum_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} b_i \right| < p \left| h \sum_{i \leqq m} \omega^{\beta_i} b_i \right|.$$

Für $\alpha_0 < \beta_0$ wähle man $g = 0$ und etwa $h = 1$; für $\alpha_0 = \beta_0$ wähle man $h = b_0$ und $g = a_0$. Dann läßt sich in beiden Fällen p so groß wählen, daß die gewünschte Ungleichung gilt.

Aus Satz 4 folgt sofort, daß jede $\left(\frac{1}{\omega}\right)$-Komponente von C_σ bei $\sigma > 0$, die in der Nullkomponente $A^{(1)}$ gelegen ist, eine — und dann auch genau eine — rationale Zahl $r \in R_0$ enthält. Eine klassische rationale echt monotone Intervallschachtelung (r_n/s_n) in $C_\sigma(\sigma > 0)$, die für ein $x_0 \in C_\sigma$ die Eigenschaft $r_n \leqq x_0 \leqq s_n$ für jedes $n \in N_0$ hat, besitzt diese Eigenschaft dann auch für sämtliche Punkte x aus der $\left(\frac{1}{\omega}\right)$-Komponente, in der x_0 liegt; also auch für eine gewisse rationale Zahl $r \in R_0$. Eine klassische rationale Intervallschachtelung also, die innerhalb C_0 eine irrationale Zahl erfaßt, hat innerhalb $C_\sigma(\sigma > 0)$ für kein $x_0 \in C_\sigma$ die Eigenschaft $r_n \leqq x_0 \leqq s_n$. Damit ist über Satz 3 das zweite Überdeckungsaxiom widerlegt.

Satz 5. *Ist $h \in C_\sigma, h \geqq 0, K \in \mathfrak{K}^{(h)}$, ist $M \subseteq \langle a, b\rangle$ bei $a, b \in K$ mit $a < b$ und ist jedem Punkt $x \in M$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ mit $\varepsilon_x \geqq d > \underline{\delta}(h)$ bei festem $d \in C_\sigma$ zugeordnet, so gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{N}$ solcher Umgebungen mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

Beweis. Für $0 < m_0 \in N_0$ sei $\frac{1}{m_0} h < d$ und für $0 < n_0 \in N_0$ sei $a < b < a + n_0 h$. Dann gilt sofort

$$x \in \langle a, b\rangle \to x \in \left\langle a + \frac{\nu}{m_0} h,\ a + \frac{\nu + 1}{m_0} h \right\rangle$$

für ein $0 \leqq \nu \leqq m_0 n_0$. Man wähle aus jedem solchen Intervall, welches Punkte von M besitzt, einen solchen aus. Dann ist M in der Vereinigungsmenge der Umgebungen dieser ausgewählten Punkte gelegen.

Satz 6. *Ist $h \in C_\sigma$, $h > 0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Intervallen $\langle x, y\rangle$ mit $x, y \in K$. Dann gilt:* a) $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_0\| \to \bigcup \mathfrak{M}$ *beschränkt in K (d. h., es gibt $A, B \in K$ mit $A < B$ und $\bigcup \mathfrak{M} \subseteq \langle A, B\rangle$; $\bigcup \mathfrak{M}$ in K unbeschränkt $\to \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqq \|\omega_0\|$.*
b) *Ist $\mathfrak{M}$ außerdem disjunkt bis höchstens auf gewisse Randpunkte und ist für $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ stets $y - x > \underline{\delta}(h)$, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_0\|$; gibt es dazu noch ein $d \in C_\sigma$, $d > \underline{\delta}(h)$, so daß für $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ stets $y - x \geqq d$ ist, so gilt:*

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_0\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ in } K \text{ beschränkt},$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_0\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ in } K \text{ unbeschränkt}.$$

Beweis. Für $\mathfrak{M} = \varnothing$ sind die Behauptungen trivial. Also $\mathfrak{M} \neq \varnothing$.
a) $\bigcup \mathfrak{M} \subseteq \langle A, B\rangle$, wo $A = \min\limits_x(\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M})$, $B = \max\limits_y(\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M})$. b) Es ist bei $a \in K$: $K = \bigcup\limits_{0 < n \in N_0} \left\langle a - n\frac{h}{m+1},\ a + n\frac{h}{m+1} \right\rangle$ für jedes $m \in N_0$. Für jedes $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ gibt es also $n, m \in N_0$ mit $a + n\frac{h}{m} \in (x, y)$ oder $a - n\frac{h}{m} \in (x, y)$; also ist $\mathfrak{M}$ äquivalent einer Teilmenge der Menge aller geordneten Paare $[g, m]$, wo $g \in G_0$, $m \in N_0$; also $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_0\|$. Ist nun noch $y - x \geqq d > \underline{\delta}(h)$ für jedes

$\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ und $d > \frac{1}{m_0} h$ $(m_0 \in N_0)$, so gibt es für jedes $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ ein $0 < n \in N_0$ mit $a + n\frac{h}{m_0} (x, y)$ oder $a - n\frac{h}{m_0} \in (x, y)$; ist jetzt $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_0\|$, so gibt es also $\|\omega_0\|$ viele solcher $a \pm n\frac{h}{m_0}$, welche Elemente von Intervallen $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ sind; also ist $\bigcup \mathfrak{M}$ in K unbeschränkt, da in jeder in K beschränkten Menge $M \subseteq K$ nur höchstens endlich viele Punkte $a \pm n\frac{h}{m_0}$ gelegen sind.

2. Von nun an verlaufen unsere Betrachtungen vorwiegend in den C_σ mit $\sigma > 0$, da es in C_0 nur eine h-Komponente gibt, also gar keine Umgebungen von Komponenten existieren. Es sei $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$, es seien $K, E \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $E > \Lambda^{(h)}$; dann ist die *E-Umgebung* $U(K, E)$ von K definiert als Menge aller $X \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $\varrho^*(K, X) < E$. Dann definiere man weiterhin wie üblich: Eine Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$ heißt *offen*, falls jeder Punkt $K \in \mathfrak{M}$ eine E-Umgebung $U(K, E)$ besitzt (für ein gewisses $E \in \mathfrak{K}^{(h)}$, $E > \Lambda^{(h)}$) mit $U(K, E) \subseteq \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}$ offen ist. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$ ist *Umgebung* von $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$, falls $K \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ offen ist. $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ ist *Berührungspunkt* von $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$, falls jede Umgebung von K mindestens einen Punkt aus $\mathfrak{M}$ enthält. Die Menge $\boldsymbol{H}\mathfrak{M}$ aller Berührungspunkte einer Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$ heißt die *abgeschlossene Hülle* oder *Abschließung* von $\mathfrak{M}$. Es sind sofort $\varnothing$ und $\mathfrak{K}^{(h)}$ offen. Die Vereinigung jeder Menge offener Mengen und der Durchschnitt jeder nicht leeren endlichen Menge offener Mengen sind offen. Es gilt also der

Satz 7. *Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$; dann bildet $\mathfrak{K}^{(h)}$ einen topologischen Raum.*

Sind $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{K}^{(h)}$ disjunkte abgeschlossene Mengen, so sind $\mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}_2$ offen und $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}_2$; also gibt es für jedes $K \in \mathfrak{M}_1$ ein $U(K, E_K) \subseteq \mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}_2$ und für jedes $L \in \mathfrak{M}_2$ ein $U(L, E_L) \subseteq \mathfrak{K}^{(h)} \setminus \mathfrak{M}_1$. Es sei $U_1 = \bigcup_{K \in \mathfrak{M}_1} U\left(K, \frac{E_K}{2}\right)$, $U_2 = \bigcup_{L \in \mathfrak{M}_1} U\left(L, \frac{E_L}{2}\right)$. Dann sind U_1, U_2 offen, $\mathfrak{M}_1 \subseteq U_1$ und $\mathfrak{M}_2 \subseteq U_2$. Es ist aber auch $U_1 \cap U_2 = \varnothing$; denn wäre $Z \in U_1 \cap U_2$, so gäbe es ein $K \in \mathfrak{M}_1$ und ein $L \in \mathfrak{M}_2$ mit $Z \in U\left(K, \frac{E_K}{2}\right) \cap U\left(L, \frac{E_L}{2}\right)$, also damit: $\varrho^*(K, L) \leqq \varrho^*(K, Z) + \varrho^*(L, Z) < \frac{E_K + E_L}{2} \leqq \max(E_K, E_L)$; Widerspruch. Es gibt demnach disjunkte offene Mengen U_1, U_2 mit $\mathfrak{M}_1 \subseteq U_1$ und $\mathfrak{M}_2 \subseteq U_2$. Jede Einermenge $\{K\}$ bei $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ ist abgeschlossen. Zusammengenommen ist also $\mathfrak{K}^{(h)}$ normal und damit auch regulär und HAUSDORFF-Raum. Wir haben den

Satz 8. *Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$; dann ist der topologische Raum $\mathfrak{K}^{(h)}$ ein normaler* HAUSDORFF-*Raum.*

Aus der Normalität von $\mathfrak{K}^{(h)}$ folgt das große URYSOHNsche Lemma und damit die vollständige Regularität von $\mathfrak{K}^{(h)}$.

Satz 9. *Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$; dann genügt der topologische Raum $\mathfrak{K}^{(h)}$ dem ersten Abzählbarkeitsaxiom; d. h., zu jedem $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ gibt es eine abzählbare Folge $U_n(K)$ von Umgebungen von K, so daß es zu jeder Umgebung $U(K)$ von K ein $U_{n_0}(K)$ gibt mit $U_{n_0}(K) \subseteq U(K)$.*

Beweis. Ist $h > 0$, so gibt es ein $h' \in C_\sigma$, $h' > 0$ mit $\bar{\delta}(h) = \underline{\delta}(h')$. Man bezeichne mit $E_n\,(n \in N_0)$ die h-Komponente von C_σ, welche den Punkt $\frac{1}{n+1}h'$ enthält; dann ist $\Lambda^{(h)} < E_{n+1} < E_n$: Es ist ja zunächst $\Lambda^{(h)} < E_m\,(m \in N_0)$ wegen $n_1 h < \frac{1}{m+1}h' - n_2 h$; für $E_{m+1} < E_m$ ist noch zu zeigen

$$\frac{1}{m+2}h' + n_1 h < \frac{1}{m+1}h' - n_2 h$$

oder $(n_1 + n_2)h < \frac{1}{(m+1)(m+2)}h'$, was aber gilt. Ist weiterhin $E \in \mathfrak{K}^{(h)}$, $E > \Lambda^{(h)}$, so gibt es ein E_n mit $E_n < E$; sonst wäre ja $\Lambda^{(h)} < E < E_n$ für alle $n \in N_0$; also gäbe es ein $h^* \in E$ mit $nh < h^* < \frac{1}{m+1}h'$ für $n, m \in N_0$, also $\bar{\delta}(h) < \underline{\delta}(h')$; Widerspruch. Man ordne nun jedem $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ als Umgebungen $U_n(K)$ die Umgebungen $U(K, E_n)$ zu. Ist dann $U(K)$ eine Umgebung von K, so gibt es ein $U(K, E) \subseteq U(K)$, also ein $U_n(K) = U(K, E_n) \subseteq U(K, E) \subseteq U(K)$.

3. Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $L \in \mathfrak{K}^{(h)}$, $K \in \mathfrak{K}_L^{(h_1)}$, $E \in \mathfrak{K}_{\Lambda^{(h)}}^{(h_1)}$, $E > \Lambda^{(h_1)}$, so definiere man die E-Umgebung $U(K, E)$ von K als Menge aller $X \in \mathfrak{K}_L^{(h_1)}$ mit $\varrho^*(K, X) < E$. Eine Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}_L^{(h_1)}$ heißt wieder *offen*, falls jeder Punkt $K \in \mathfrak{M}$ eine E-Umgebung $U(K, E)$ besitzt mit $U(K, E) \subseteq \mathfrak{M}$. Wie in 2. definiert man (jetzt relativiert auf $\mathfrak{K}_L^{(h_1)}$) die Begriffe „abgeschlossen", „Umgebung", „Berührungspunkt", „Abschließung $\boldsymbol{H}\mathfrak{M}$". Es sind sofort $\varnothing$ und $\mathfrak{K}_L^{(h_1)}$ offen. Die Vereinigung jeder Menge offener Mengen und der Durchschnitt jeder nicht leeren endlichen Menge offener Mengen sind offen. Also gilt der

Satz 10. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$; dann bildet $\mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ einen topologischen Raum.*

Es gelten wieder analog wie unter 2. die Sätze:

Satz 11. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$; dann ist der topologische Raum $\mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ ein normaler* HAUSDORFF-*Raum.*

Satz 12. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 > 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$; dann genügt der topologische Raum $\mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

Es gilt weiterhin

Satz 13. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 > 0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ und ist $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ unmittelbarer Vorgänger von $\mathfrak{K}^{(h)}$; dann genügt der topologische Raum $\mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom (besitzt eine abzählbare Basis); d. h., es gibt eine abzählbare Menge S offener Mengen $\Gamma \subseteq \mathfrak{K}_K^{(h_1)}$, so daß es zu jedem $X \in \mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ und zu jeder Umgebung $U(X)$ von X ein $\Gamma_0 \in S$ gibt mit $X \in \Gamma_0 \subseteq U(X)$.*

Beweis. Es sei $a \in K$; dann ist $K = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh,\ a + nh \rangle$. Man wähle alle Punkte $a + rh$ von K aus, wobei $r \in R_0$ ist, und ordne der h_1-Komponente L,

welche $a + rh$ enthält, die Umgebungen $U(L, E_n)$ zu; dabei sei E_n $(n \in N_0)$ die h_1-Komponente X mit $\frac{1}{n+1} h \in X$. S sei die abzählbare Menge all dieser offenen Mengen $U(L, E_n)$ (bei beliebigem $r \in E_0$ und beliebigem $n \in N_0$). Ist nun $X \in \mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ und $U(X)$ eine Umgebung von X, dann gibt es eine E-Umgebung $U(X, E) \subseteq U(X)$ mit $E \in \mathfrak{K}^{(h_1)}$, $E > \Lambda^{(h_1)}$, $E \subseteq \Lambda^{(h)}$. Es sei $x \in X$, dann ist $X = \bigcup_{0<n\in N_0} \langle x - nh_1, x + nh_1\rangle$; wegen $\bar{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h)$ ist $x + nh_1 < x + \frac{1}{m+1} h$ und $x - \frac{1}{m+1} h < x - nh_1$ für $n, m \in N_0$, und es gibt kein $y \in C_\sigma$ mit $x + nh_1 < y < x + \frac{1}{m+1} h$ und kein $y \in C_\sigma$ mit $x - \frac{1}{m+1} h < y < x - nh_1$, da sonst $nh_1 < y - x < \frac{1}{m+1} h$ bzw. $nh_1 < x - y < \frac{1}{m+1} h$ wäre im Widerspruch zu $\bar{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h)$. Es gibt dann also ein $0 < m_0 \in N_0$ mit $x + \frac{1}{m_0} h < y$ für jedes $y \in X + E$ und $x - \frac{1}{m_0} h > y$ für jedes $y \in X - E$. Es gibt ein $r_0 \in R_0$ mit

$$x + \frac{1}{4m_0} h \leqq a + r_0 h \leqq x + \frac{1}{3m_0} h;$$

L_0 sei die h_1-Komponente, die $a + r_0 h$ enthält; $n_0 = 2m_0 - 1$, $\Gamma_0 = U(L_0, E_{n_0})$. Wegen

$$x - \frac{1}{m_0} h < x - \frac{1}{4m_0} h < x - \frac{1}{6m_0} h < x - nh_1 < x + nh_1 < x + \frac{3}{4m_0} h <$$

$$< x + \frac{5}{6m_0} h < x + \frac{1}{m_0} h$$

für $0 < n \in N_0$ ist schließlich $X \in \Gamma_0 \subseteq U(X, E) \subseteq U(X)$.

Der Raum $\mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ von Satz 13 läßt sich nach dem ersten Urysohnschen Metrisationssatz metrisieren.

4. Satz 14 (Lindelöfscher Überdeckungssatz). *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 > 0$, $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$, ist $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ unmittelbarer Vorgänger von $\mathfrak{K}^{(h)}$, ist $M \subseteq \mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ und ist schließlich jedem Punkt $X \in M$ eine Umgebung $U(X, E_X)$ zugeordnet; dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\mathfrak{N}$ solcher Umgebungen mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

Beweis. Ist $x \in X \in M$, so ordne man x die Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ bei $\varepsilon_x \in \frac{E_X}{2}$ zu; es ist sofort $\varepsilon_x > \underline{\delta}(h)$. Nach Satz 2 gibt es dann eine höchstens abzählbare Menge $\mathfrak{N}^*$ solcher Umgebungen mit $\bigcup M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}^*$. Jedem $U(y, \varepsilon_y) \in \mathfrak{N}^*$ ordne man die Umgebung $U(Y, E_Y)$ zu (wobei also $y \in Y$ gilt); $\mathfrak{N}$ sei die Menge all dieser $U(Y, E_Y)$. Ist jetzt $X \in M$ und $x \in X$, so gibt es ein $U(Y_0, E_{Y_0}) \in \mathfrak{N}$ mit $x \in \bigcup U(Y_0, E_{Y_0})$; es gibt also ein $X_0 \in U(Y_0, E_{Y_0})$ mit $x \in X_0$; dann ist aber sofort $X = X_0$ wegen $x \in X \cap X_0$, also $X \in U(Y_0, E_{Y_0})$; also $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.

5. An topologisch-algebraischen Strukturen haben wir folgende:

Satz 15. a) *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$; *dann ist* $\mathfrak{K}^{(h)}$ *eine topologische abelsche Gruppe.* b) *Ist* h $h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$; *dann ist* $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ *eine topologische abelsche Gruppe.*

Beweis. Es ist noch zu zeigen die Stetigkeit von $K + L$ und $-K$ bei $K, L \in \mathfrak{K}^{(h)}$ (bzw. $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$). Ist $E \in \mathfrak{K}^{(h)}$ (bzw. $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$) und $E > \Lambda^{(h)}$ (bzw. $\Lambda^{(h_1)}$), so ist doch

$$|(K + L) - (K_0 + L_0)| \leqq |K - K_0| + |L - L_0| < E$$

bei $|K - K_0|, |L - L_0| < \frac{E}{2}$ und

$$|(-K) - (-K_0)| = |K_0 - K| < E \text{ bei } |K - K_0| < E.$$

Satz 16. C_σ *ist ein topologischer Körper.*

Beweis. $|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leqq |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon$ für $|x - x_0|$, $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. $|(-x) - (-x_0)| = |x_0 - x| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \varepsilon$;

$$|(x \cdot y) - (x_0 \cdot y_0)| \leqq |x - x_0|\,|y| + |x_0|\,|y - y_0| \leqq |x - x_0| \cdot (|y_0| + 1) + \\ + (|x_0| + 1) \cdot |y - y_0|$$

für $|y - y_0| < 1$; also

$$|(x \cdot y) - (x_0 \cdot y_0)| < \varepsilon \text{ für } |y - y_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}\right), \\ |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)};$$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x|\,|x_0|} \leqq |x - x_0| \frac{2}{|x_0|^2} \text{ für } |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$$

$$\left(\text{dann ist } |x| > \frac{|x_0|}{2}; \text{ also } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \min\left(\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right)\right).$$

Satz 17. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq h_1 > 0$ *und ist* $\mathfrak{K}^{(h_1)}$ *unmittelbarer Vorgänger von* $\mathfrak{K}^{(h)}$; *dann ist* $\mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ *ein topologischer Vektorraum über dem Körper* R_0 *der (endlichen) rationalen Zahlen.*

Beweis. $|r \cdot K - r_0 \cdot K_0| \leqq |r - r_0|\,|K| + |r_0|\,|K - K_0| \leqq$

$$\leqq |r - r_0|\left(|K_0| + \frac{|K_0|}{2}\right) + |r_0|\,|K - K_0|$$

für $|K - K_0| < \frac{|K_0|}{2}$ und $K_0 \neq \Lambda^{(h_1)}$. Für $E \in \mathfrak{K}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$, $E > \Lambda^{(h_1)}$ gibt es ein $n \in N_0$, $n > 0$ mit $\frac{E}{n}|r_0| < \frac{E}{2}$ und $\frac{|K_0| + \frac{|K_0|}{2}}{n} < \frac{E}{2}$. Dann ist also

$|r \cdot K - r_0 \cdot K_0| < E$ für $|K - K_0| < \min\left(\frac{|K_0|}{2}, \frac{E}{n}\right)$ und $|r - r_0| < \frac{1}{n}$.
Für $K_0 = \Lambda^{(h_1)}$ hat man $|r \cdot k| < E$ bei $|K| < E$ und $|r - r_0| < 1$.

Satz 18. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $\bar{\delta}(1) > h \geqq h_1 > 0$ *und ist* $\mathfrak{R}^{(h_1)}$ *unmittelbarer Vorgänger von* $\mathfrak{R}^{(h)}$; *dann ist* $\mathfrak{R}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$ *ein topologischer Ring.*

Beweis. $|K \cdot L - K_0 \cdot L_0| \leqq |K - K_0|\,|L| + |L - L_0|\,|K_0| \leqq |K - K_0| \cdot$

$$\cdot\left(|L_0| + \frac{|L_0|}{2}\right) + |K_0|\,|L - L_0|$$

für $|L - L_0| < \frac{|L_0|}{2}$ und $L_0 \neq \Lambda^{(h_1)}$. Für $E \in \mathfrak{R}^{(h_1)}_{\Lambda^{(h)}}$, $E > \Lambda^{(h_1)}$ gibt es ein $n \in N_0$, $n > 0$ mit $\frac{E}{n} \cdot \left(|L_0| + \frac{|L_0|}{2}\right) < \frac{E}{2}$ und $\frac{E}{n}|K_0| < \frac{E}{2}$. Dann ist also
$|K \cdot L - K_0 \cdot L_0| < E$ für $|K - K_0| < \frac{E}{n}$ und $|L - L_0| < \min\left(\frac{|L_0|}{2}, \frac{E}{n}\right)$.
Für $L_0 = \Lambda^{(h_1)}$ hat man $|K \cdot L| \leqq |K - K_0|\,|L| < E$ für $|L| < E$ und
$|K - K_0| < \frac{E}{n}$ bei $E\frac{E}{n} < E$.

ENDLICH-DIMENSIONALE PUNKTMENGEN TRANSFINITE TOPOLOGISCHE STRUKTUREN

§ 13 Häufungspunkte

1. Es sei $k \in N_0$, $k > 0$; dann definiere man C_σ^k als die Menge aller k-Tupel $x = [x^1, \ldots, x^k]$ mit $x^\varkappa \in C_\sigma$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$. $M \subseteq C_\sigma^k$ heißt *beschränkt*, falls es ein $K \in C_\sigma$, $K > 0$ gibt mit $x = [x^1, \ldots, x^k] \in M \to |x^\varkappa| < K$. $M \subseteq C_\sigma^k$ ist genau dann beschränkt, wenn jede $\varkappa$-Komponente der Punkte von M beschränkt ist. Also ist jede Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ mit $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$ beschränkt. Der in C_σ^k zugrunde gelegte Folgenbegriff ist wieder der Begriff der *Folge vom Typus* ω_σ.

Eine Folge $(x_n) = ([x_n^1, \cdots, x_n^k])$ von Elementen $x_n \in C_\sigma^k$ heißt *Fundamentalfolge in* C_σ^k, falls es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $|x_{n^*}^\varkappa - x_{n^{**}}^\varkappa| < \varepsilon$ für $n, n^* \in N_\sigma$ und $n, n^* \geqq N$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$. (x_n) ist Fundamentalfolge in C_σ^k genau dann, wenn jede $\varkappa$-Komponente $(x_n^\varkappa)$ von (x_n) Fundamentalfolge in C_σ ist. Also ist jede Fundamentalfolge (x_n) in C_σ^k beschränkt. Eine Folge $(x_n) = ([x_n^1, \ldots, x_n^k])$ $(x_n \in C_\sigma^k)$ *konvergiert gegen* $a = [a^1, \ldots, a^k] \in C_\sigma^k$, falls es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $|x_n^\varkappa - a^\varkappa| < \varepsilon$ für $n \in N_\sigma$ und $n \geqq N$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$. (x_n) konvergiert gegen a genau dann, wenn für jedes $\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ $(x_n^\varkappa)$ gegen $a^\varkappa$ konvergiert. (x_n) *konvergiert*, falls (x_n) gegen ein $a \in C_\sigma^k$ konvergiert. (x_n) konvergiert genau dann, wenn jede $\varkappa$-Komponente $(x_n^\varkappa)$ konvergiert. Also besitzt jede konvergente Folge (x_n) genau einen *Grenzwert* $a = \lim x_n$ (gegen den sie konvergiert), und jede Teilfolge von (x_n) konvergiert ebenfalls gegen a. (x_n) ist Fundamentalfolge genau dann, wenn (x_n) konvergiert.

Unter $D_\sigma^k (k \in N_0, k > 0)$ verstehe man die Menge aller k-Tupel $x = [x^1, \ldots, x^k]$ mit $x^\varkappa \in D_\sigma$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$. Für $x, y \in D_\sigma^k$ mit $x^\varkappa < y^\varkappa$ definiere man die *Intervalle* folgendermaßen: Es sei

$\langle x, y\rangle$ die Menge aller $z \in C_\sigma^k$ mit $x^\varkappa \leqq z^\varkappa \leqq y^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$,

(x, y) die Menge aller $z \in C_\sigma^k$ mit $x^\varkappa < z^\varkappa < y^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$,

$\langle x, y)$ die Menge aller $z \in C_\sigma^k$ mit $x^\varkappa \leqq z^\varkappa < y^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$,

$(x, y\rangle$ die Menge aller $z \in C_\sigma^k$ mit $x^\varkappa < z^\varkappa \leqq y^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$.

Eine Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ ist beschränkt genau dann, wenn es ein Intervall (a, b) mit $a, b \in C_\sigma^k$ und $M \subseteq (a, b)$ gibt.

Die *Entfernung* $\varrho(x, y)$ von $x, y \in C_\sigma^k$ sei definiert als $\varrho(x, y) = \sum_{\varkappa=1}^{k} |x^\varkappa - y^\varkappa|$. Dann ist $\varrho(x, y) \geqq 0$, $\varrho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$, $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ und

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z).$$

C_σ^k bildet also einen transfinit-metrischen Raum vom Tpy ω_σ. Dabei sei ein *transfinit-metrischer Raum vom Typ* ω_σ definiert als das geordnete Paar $[M, \varrho]$ einer Menge M und einer eindeutigen Abbildung ϱ von $M \times M$ in C_σ mit den Eigenschaften

$$(1)\ \varrho(x, y) \geqq 0,\ \varrho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y,$$

$$(2)\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x),$$

$$(3)\ \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z).$$

Die transfinit-metrischen Räume vom Typ ω_0 sind die üblichen klassischen metrischen Räume.

Für $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ sei die *kubische ε-Umgebung* $U(a, \varepsilon)$ von $a \in C_\sigma^k$ die Menge aller $x \in C_\sigma^k$ mit $|a^\varkappa - x^\varkappa| < \varepsilon$ für jedes $\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ und die *spärische ε-Umgebung* $S(a, \varepsilon)$ von $a \in C_\sigma^k$ die Menge aller $x \in C_\sigma^k$ mit $\varrho(a, x) < \varepsilon$. Es ist für $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ stets $S(a, \varepsilon_1) \subset U(a, \varepsilon) \subset S(a, k\varepsilon_2)$ und $U\left(a, \frac{\varepsilon_1}{k}\right) \subset S(a, \varepsilon) \subset U(a, \varepsilon_2)$. U heiße *Umgebung* von $a \in C_\sigma^k$, falls $a \in U \subseteq C_\sigma^k$ gilt und jedes $x \in U$ eine ganz in U gelegene kubische (sphärische) Umgebung besitzt. Für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ sind dann $U(a, \varepsilon)$, $S(a, \varepsilon)$ Umgebungen von a. Eine Folge (x_n) $(x_n \in C_\sigma^k)$ konvergiert genau dann gegen $a \in C_\sigma^k$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $x_n \in U(a, \varepsilon)$ $(x_n \in S(a, \varepsilon))$ für $n \in N_\sigma$ und $n \geqq N$. (x_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in N_\sigma$ gibt mit $x_n \in U$ für $n \in N_\sigma$ und $n \geqq N$.

2. $a \in C_\sigma^k$ heiße *Berührungspunkt* von $M \subseteq C_\sigma^k$, falls für jede Umgebung U von a gilt: $M \cap U \neq \emptyset$. Die *abgeschlossene Hülle* bzw. *Abschließung* $\boldsymbol{H}M$ von M sei die Menge aller Berührungspunkte von M. Trivial ist $M \subseteq \boldsymbol{H}M$. Ist a Berührungspunkt von M, so gibt es zwei Fälle:

(1) Für jede Umgebung U von a ist $\overline{\overline{M \cap U}} \geqq \|\omega_\sigma\|$; dann heißt a *Häufungspunkt* von M.

(2) Es gibt eine Umgebung U von a mit $\overline{\overline{M \cap U}} < \|\omega_\sigma\|$; dann heißt a *isolierter Punkt* von M.

Wie im eindimensionalen Fall beweist man die folgenden Sätze:

Satz 1. *a ist isolierter Punkt von M genau dann, wenn $a \in M$ und es eine Umgebung U von a gibt mit $M \cap (U \setminus \{a\}) = \emptyset$. a ist Häufungspunkt von M genau dann, wenn für jede Umgebung U von a gilt: $M \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.*

Satz 2. *Wenn $a \in C_\sigma^k$, $M \subseteq C_\sigma^k$ und für jede Umgebung U von a gilt $M \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, dann ist $\overline{\overline{M \cap U}} \geqq \|\omega_\sigma\|$ für jede Umgebung U von a.*

Die *Ableitung* M' von $M \subseteq C_\sigma^k$ sei die Menge aller Häufungspunkte von M. Dann gilt $\boldsymbol{H}M = M \cup M'$.

Satz 3. *$a \in \boldsymbol{H}M$ genau dann, wenn es eine gegen a konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \in M$ gibt. $a \in M'$ genau dann, wenn es eine gegen a konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \in M$ gibt, deren Glieder paarweise verschieden sind.*

Wir nennen schließlich eine Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ *abgeschlossen*, falls $M' \subseteq M$ (d. h. $M = \boldsymbol{H}M$), *in sich dicht*, falls $M \subseteq M'$ und *perfekt*, falls $M = M'$ gilt. Perfekte Mengen sind z. B. die Intervalle $\langle a, b\rangle$ bei $a, b \in D_\sigma^k$.

§ 14 Überdeckungssätze

1. *Satz 1. *Ist $a, b \in C_\sigma^k$ mit $a^\varkappa < b^\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, ist jedem Punkt $x \in \langle a, b\rangle$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ zugeordnet und ist schließlich $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $\langle a, b\rangle \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$.*

Beweis. Auf Grund des Überdeckungsaxioms gilt der Satz für $k = 1$. Wir setzen die Gültigkeit des Satzes für k voraus und beweisen den Satz für $k + 1$. Es sei $a, b \in C_\sigma^{k+1}$ mit $a^\varkappa < b^\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k + 1)$ und $I = \langle a, b\rangle$; $I' = \langle a', b'\rangle$ bei $a', b' \in C_\sigma^k$ und $a'^\varkappa = a^\varkappa$, $b'^\varkappa = b^\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$. Jedem $x \in I$ ist eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x) \subseteq C_\sigma^{k+1}$ zugeordnet. Wir betrachten für ein festes $\xi \in \langle a^{k+1}, b^{k+1}\rangle$ alle Punkte $y \in I$ mit $[y^1, \ldots, y^k] \in I'$ und $y^{k+1} = \xi$. Jeder Umgebung $U(y, \varepsilon_y)$ ist eindeutig zugeordnet die Umgebung $U'(y', \varepsilon_{y'}) \subseteq C_\sigma^k$ mit $y' = [y^1, \ldots, y^k]$, $\varepsilon_{y'} = \varepsilon_y$. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Menge $\mathfrak{N}_\xi'$ solcher $U'(y', \varepsilon_{y'})$ mit $I' \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\xi'$, $\overline{\overline{\mathfrak{N}_\xi'}} < \|\omega_\sigma\|$. $\mathfrak{N}_\xi$ sei die Menge aller Umgebungen $U(y, \varepsilon_y)$ mit $U'(y', \varepsilon_{y'}) \in \mathfrak{N}_\xi'$. Es sei nun $h_\xi \in C_\sigma$ so klein (> 0) gewählt, daß für $H_\xi = \langle c, d\rangle$ mit $c, d \in C_\sigma^{k+1}$; $c^\varkappa = a^\varkappa$, $d^\varkappa = b^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$; $c^{k+1} = \xi - h_\xi$, $d^{k+1} = \xi + h_\xi$ gilt: $H_\xi \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\xi$. Jedem $\xi \in \langle a^{k+1}, b^{k+1}\rangle$ ist damit eindeutig eine Umgebung $U(\xi, h_\xi)$ zugeordnet. X sei eine Menge solcher ξ mit

$$\langle a^{k+1}, b^{k+1}\rangle \subseteq \bigcup_{\xi \in X} U(\xi, h_\xi) \text{ und } \overline{\overline{X}} < \|\omega_\sigma\|.$$

Dann ist aber $I \subseteq \bigcup_{\xi \in X} H_\xi$. Hieraus und aus $H_\xi \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\xi$ folgt die Existenz einer Menge $\mathfrak{N}$ von Umgebungen $U(x, \varepsilon_x) \subseteq C_\sigma^{k+1}$ mit $I \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$.

Wie im eindimensionalen Fall folgt aus Satz 1 der

*Satz 2 (Heine—Borelscher Überdeckungssatz). *Ist jedem Punkt x einer abgeschlossenen beschränkten Punktmenge $M \subseteq C_\sigma^k$ eindeutig eine Umgebung $U(x)$ zugeordnet und ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$.*

Satz 3. *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma^k$. Dann gilt:*

a) *$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \to \bigcup \mathfrak{M}$ beschränkt; $\bigcup \mathfrak{M}$ unbeschränkt $\to \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqq \|\omega_\sigma\|$.*

*b) *Ist $\mathfrak{M}$ außerdem disjunkt bis höchstens auf gewisse Randpunkte, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$; gibt es dazu noch ein $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, so daß für $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ stets $b^\varkappa - a^\varkappa \geqq \varepsilon$ ist $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, so gilt:*

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ beschränkt},$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_\sigma\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ unbeschränkt}.$$

Beweis. a) Wenn $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$ ist, dann gilt auch für jedes $\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, daß die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}_\varkappa$ aller $\varkappa$. Komponenten $\langle a^\varkappa, b^\varkappa\rangle$ der $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ kleiner als $\|\omega_\sigma\|$ ist; also ist $\bigcup \mathfrak{M}_\varkappa$ beschränkt, also auch $\bigcup \mathfrak{M}$. b) In jedem $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ liegt ganz im Inneren ein rationaler Punkt aus $R_\sigma^k = \underbrace{R_\sigma \times \cdots \times R_\sigma}_{k\text{-mal}}$. Ordnet man nach dem Auswahlaxiom jedem Intervall $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ genau einen solchen Punkt zu, so ist $\mathfrak{M}$ gleichmächtig einer Teilmenge von R_σ^k, also $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$. „$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \to \bigcup \mathfrak{M}$

beschränkt" folgt bereits aus a). Die andere Richtung folgt so: Es ist zunächst $\bigcup \mathfrak{M}$ abgeschlossen. Denn ist h Häufungspunkt von $\bigcup \mathfrak{M}$, so liegen in $\left(h - \frac{\varepsilon}{2}, h + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ (gemeint ist damit das offene Intervall (h_1, h_2) mit $h_1^{\varkappa} = h^{\varkappa} - \frac{\varepsilon}{2}$, $h_2^{\varkappa} = h^{\varkappa} + \frac{\varepsilon}{2}$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$) Punkte von höchstens 2^k verschiedenen Intervallen aus $\mathfrak{M}$ (induktiv über k beweisbar); andererseits gibt es eine gegen h konvergierende Folge lauter verschiedener Punkte aus $\bigcup \mathfrak{M}$; es liegen also in mindestens einem der 2^k Intervalle $\|\omega_\sigma\|$ viele Glieder dieser Folge; also ist h Häufungspunkt eines dieser Intervalle, gehört also zu diesem, und damit ist $h \in \bigcup \mathfrak{M}$. Jedem Punkt $x \in \langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ ordnen wir das offene Intervall $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ zu. Falls dann $\bigcup \mathfrak{M}$ beschränkt ist, wird $\bigcup \mathfrak{M}$ von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen solchen Intervallen überdeckt, also auch von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen Intervallen $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ (da ja jedes $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \bigcap \mathfrak{M}$ von höchstens K abgeschlossenen Intervallen aus $\mathfrak{M}$ überdeckt wird, wobei $K \in N_0$ eine geeignete feste natürliche Zahl ist); also $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$.

Aus Satz 3 folgt sofort: Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma^k$, ist $M \subseteq C_\sigma^k$ unbeschränkt und $M \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqq \|\omega_\sigma\|$; ist dabei $\mathfrak{M}$ disjunkt bis auf Randpunkte, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_\sigma\|$. Mit Hilfe des Überdeckungsaxiomes folgt noch weiter: Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma^k$, ist $\mathfrak{M}$ disjunkt bis auf Randpunkte, haben die Intervallseiten eine Länge $\geqq \varepsilon > 0$ und ist $M \subseteq C_\sigma^k$ eine beschränkte Menge mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$, so läßt sich M durch weniger als $\|\omega_\sigma\|$ viele Elemente aus $\mathfrak{M}$ überdecken; d. h. es gibt ein $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$. Denn die Menge $\mathfrak{N}$ aller Elemente $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{M}$ mit $\langle a, b\rangle \cap M \neq \varnothing$ hat die Eigenschaft, daß $\bigcup \mathfrak{N}$ beschränkt ist, also ist $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} < \|\omega_\sigma\|$; außerdem ist nach Konstruktion $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.

2. Analog wie im Eindimensionalen beweist man die folgenden beiden Sätze:

Satz 4. *Für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ über C_σ^k; d. h. eine Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ von Intervallen $\langle a, b\rangle$ mit $a, b \in C_\sigma^k$ und $b^{\varkappa} - a^{\varkappa} = \varepsilon$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ derart, daß zwei Intervalle aus $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben und $C_\sigma^k \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon^k$ gilt.*

Aus den Bemerkungen im Anschluß an Satz 3 folgt sofort: Jedes ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ über C_σ^k hat die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$. Mit Hilfe des Überdeckungsaxiomes folgt noch weiter: Jede beschränkte Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ wird bei jedem ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ über C_σ^k von weniger als $\|\omega_\sigma\|$ vielen Elementen aus $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ überdeckt.

Satz 5 (Lindelöfscher Überdeckungssatz). *Ist jedem Punkte x einer beliebigen Punktmenge $M \subseteq C_\sigma^k$ eindeutig eine Umgebung $U(x)$ zugeordnet und ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller dieser Umgebungen, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \leqq \|\omega_\sigma\|$.*

3. Als Anwendungen des HEINE—BORELschen Überdeckungssatzes beweist man wie im eindimensionalen Fall:

*Satz 6. *Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, M beschränkt und $M' = \emptyset$, so ist $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$.*

*Satz 7 (BOLZANO—WEIERSTRASSsches Häufungsstellenprinzip). *Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, M beschränkt und $\overline{\overline{M}} \geqq \|\omega_\sigma\|$, so ist $M' \neq \emptyset$.*

*Satz 8. *Ist die Folge (a_n) bei $a_n \in C_\sigma^k$ beschränkt, so besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_n').*

*Satz 9 (CANTORscher Durchschnittssatz). *Jede fallende Folge nicht leerer, beschränkter, abgeschlossener Mengen $C_\sigma^k \supseteq F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ besitzt einen nicht leeren Durchschnitt.*

§ 15 Transfinite topologische Räume

1. Ist $M \subseteq C_\sigma^k$ und $\overline{\overline{M}} < \|\omega_\sigma\|$, so hat M keine Häufungspunkte, also ist $\boldsymbol{H}M = M$, also ist M abgeschlossen. Wie im eindimensionalen Fall beweist man die folgenden Sätze:

Satz 1. *Ist $M_1 \subseteq M_2 \subseteq C_\sigma^k$, so ist $M_1' \subseteq M_2'$ und $\boldsymbol{H}M_1 \subseteq \boldsymbol{H}M_2$.*

Satz 2. *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von Teilmengen $M \subseteq C_\sigma^k$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$; dann ist $\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M\right)' = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M'$ und $\boldsymbol{H} \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{H}M$.*

Satz 3. *Die Ableitung jeder Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ ist abgeschlossen: $M'' \subseteq M'$. Die abgeschlossene Hülle jeder Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ ist abgeschlossen: $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}M = \boldsymbol{H}M$.*

Satz 4 (Grundeigenschaften abgeschlossener Mengen).

(1) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge abgeschlossener Mengen $M \subseteq C_\sigma^k$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$; dann ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ abgeschlossen.*

(2) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge abgeschlossener Mengen $M \subseteq C_\sigma^k$ mit $\mathfrak{M} \neq \emptyset$; dann ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ abgeschlossen.*

(3) *$\emptyset$ und C_σ^k sind abgeschlossen.*

Satz 5. *Die abgeschlossene Hülle $\boldsymbol{H}M$ einer Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ ist die kleinste die Menge M umfassende abgeschlossene Menge $F \subseteq C_\sigma^k$; d. h. $\boldsymbol{H}M = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$, wobei $\mathfrak{F}$ die Menge aller abgeschlossenen Mengen F ist mit $M \subseteq F \subseteq C_\sigma^k$.*

2. $M \subseteq C_\sigma^k$ heißt *offen*, wenn das Komplement $C_\sigma^k \setminus M$ abgeschlossen ist. $a \in M \subseteq C_\sigma^k$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn $a \notin \boldsymbol{H}(C_\sigma^k \setminus M)$. $a \in M$ ist innerer Punkt von $M \subseteq C_\sigma^k$ genau dann, wenn es eine Umgebung U von a mit $U \subseteq M$ gibt. $M \subseteq C_\sigma^k$ ist offen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in M$ innerer Punkt von M ist. Offene Mengen sind z. B. die Intervalle (a, b) bei $a, b \in D_\sigma^k$, ebenso die Umgebungen U eines Punktes $x \in C_\sigma^k$. Man kann die Umgebungen eines Punktes $x \in C_\sigma^k$ jetzt definieren als offene Mengen, welche den Punkt x enthalten. Die ε-Umgebungen $U(x, \varepsilon)$ heißen *elementare offene Mengen*, und jede offene Menge

$M \subseteq C_\sigma^k$ ist sofort die Vereinigung elementarer offener Mengen. Wie im Eindimensionalen beweist man den

Satz 6 (Grundeigenschaften offener Mengen).

(1) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge offener Mengen $M \subseteq C_\sigma^k$ mit $0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\|$; dann ist $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ offen.*

(2) *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge offener Mengen $M \subseteq C_\sigma^k$; dann ist $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$ offen.*

(3) *$\varnothing$ und C_σ^k sind offen.*

C_σ^k bildet einen transfinit-topologischen Raum vom Typ ω_σ, wobei wir das geordnete Paar $[M, \mathfrak{S}]$ einer Menge M und einer Teilmenge $\mathfrak{S}$ der Potenzmenge von M einen *transfinit-topologischen Raum vom Typ* ω_σ nennen, falls gilt:

$$(1)\quad \varnothing \in \mathfrak{S},\ M \in \mathfrak{S}.$$

$$(2)\quad \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S} \to \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \in \mathfrak{S}.$$

$$(3)\quad \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S} \wedge 0 < \overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_\sigma\| \to \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M \in \mathfrak{S}.$$

Die transfinit-topologischen Räume vom Typ ω_0 sind dann die üblichen klassischen topologischen Räume.

Dual zur abgeschlossenen Hülle $\boldsymbol{H}M$ von $M \subseteq C_\sigma^k$ definieren wir den *offenen Kern* $\boldsymbol{K}M$ von M als Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen. $\boldsymbol{K}M$ ist stets offen und ist die größte in M enthaltene offene Menge. $\boldsymbol{K}M$ ist die Menge aller inneren Punkte $x \in M$.

3. Ist $\varnothing \subset M, N \subseteq C_\sigma^k$, so verstehen wir unter dem *Abstand* $\varrho(M, N)$ von M und N die untere Grenze aller $\varrho(x, y)$ bei $x \in M, y \in N$. Ist $x \in C_\sigma^k$, $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma^k$, so sei $\varrho(x, M) = \varrho(\{x\}\, M)$. Es gilt trivial der

Satz 7. *Ist $a \in C_\sigma^k$, $\varnothing \subset M \subseteq C_\sigma^k$, so gilt: $a \in \boldsymbol{H}M \leftrightarrow \varrho(a, M) = 0$. Ist $a \in C_\sigma^k$, $\varnothing \subset M \setminus \{a\} \subseteq C_\sigma^k$, so gilt: $a \in M' \leftrightarrow \varrho(a, M \setminus \{a\}) = 0$.*

Ist also M abgeschlossen, so folgt wegen $\boldsymbol{H}M = M$ sofort: $a \in M \leftrightarrow \varrho(a, M) = 0$. Ist $M \cap N \neq \varnothing$, so ist $\varrho(M, N) = 0$; aber nicht umgekehrt, wie unser früheres eindimensionales Gegenbeispiel zeigt. Jedoch gilt der

*Satz 8. *Ist $\varnothing \subset M, N \subseteq C_\sigma^k$, M beschränkt, M und N abgeschlossen und $\varrho(M, N) = 0$, so ist $M \cap N \neq \varnothing$.*

Beweis. Für jedes $n \in N_\sigma$ gibt es Punkte $x_n \in M$, $y_n \in N$ mit

$$0 \leqq \varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n+1}.$$

Die Folge (x_n) ist beschränkt. Es gibt also eine konvergente Teilfolge (x_{n_p}) von (x_n) mit $\lim x_{n_p} = x$; dann ist $x \in \boldsymbol{H}M = M$. Wegen

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} |y_{n_p}^{\varkappa}| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} |x_{n_p}^{\varkappa}| + \sum_{\varkappa=1}^{k} |y_{n_p}^{\varkappa} - x_{n_p}^{\varkappa}| < K + \frac{1}{n_p + 1} \leqq K + 1$$

ist also auch (y_{n_p}) beschränkt. Es gibt demnach eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{p_q}})$ von (y_{n_p}) mit etwa $\lim y_{n_{p_q}} = y$; dann ist $y \in \boldsymbol{H}N = N$. Es ist auch

$x = \lim x_{n_{p_q}}$, also $x^\varkappa - y^\varkappa = \lim_{q \to \infty}{}' \left(x^\varkappa_{n_{p_q}} - y^\varkappa_{n_{p_q}}\right) = 0$, also $x^\varkappa = y^\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, also $x = y$.

Satz 9. *Ist* $\emptyset \subset M, N \subseteq C_\sigma^k$, *so ist*

$$\varrho(M, N) = \varrho(\boldsymbol{H}M, N) = \varrho(M, \boldsymbol{H}N) = \varrho(\boldsymbol{H}M, \boldsymbol{H}N).$$

Beweis. Wie im eindimensionalen Fall. Man nehme dort lediglich für $U(\bar{x}, \varepsilon - \varepsilon')$ die sphärische Umgebung $S(\bar{x}, \varepsilon - \varepsilon')$.

Unter dem *Durchmesser* $\delta(M)$ einer Menge $\emptyset \subset M \subseteq C_\sigma^k$ verstehen wir die obere Grenze aller $\varrho(x, y)$ mit $x, y \in M$. Wie im Eindimensionalen (indem man im früheren Beweis nur sphärische Umgebungen S statt U verwendet) gilt der

Satz 10. *Ist* $\emptyset \subset M \subseteq C_\sigma^k$, *so ist* $\delta(\boldsymbol{H}M) = \delta(M)$.

4. Für $\emptyset \subset M \subseteq C_\sigma^k$ verstehen wir unter der (*sphärischen*) *ε-Umgebung* $S(M, \varepsilon)$ von M $(\varepsilon \in C_\sigma,\ \varepsilon > 0)$ die Menge aller Punkte $x \in C_\sigma^k$ mit $\varrho(x, M) < \varepsilon$. Es ist sofort $S(x, \varepsilon) = S(\{x\}, \varepsilon)$. Wie im eindimensionalen Fall gelten dann die folgenden Sätze (man verwende in den früheren Beweisen statt der Umgebungen U die sphärischen Umgebungen S):

Satz 11. *Ist* $\emptyset \subset M \subseteq C_\sigma^k, \varepsilon \in C_\sigma, \varepsilon > 0$, *dann gilt*: $S(M, \varepsilon) = \bigcup_{x \in M} S(x, \varepsilon)$.

Es ist dann also $S(M, \varepsilon)$ eine offene Menge. Man könnte noch definieren für $\emptyset \subset M \subseteq C_\sigma^k$ die (*kubische*) *ε-Umgebung* $U(M, \varepsilon)$ von M als $\bigcup_{x \in M} U(x, \varepsilon)$. Dann ist auch $U(M, \varepsilon)$ offen. Unter einer *Umgebung* U von $M \subseteq C_\sigma^k$ verstehen wir analog zu den Punktumgebungen eine offene Menge U mit $M \subseteq U$.

Satz 12 (Trennungssatz). *Je zwei nicht leere, disjunkte, abgeschlossene Mengen $F_1, F_2 \subseteq C_\sigma^k$ besitzen disjunkte Umgebungen $U_1 \supseteq F_1$ und $U_2 \supseteq F_2$.*

Der transfinit-topologische Raum C_σ^k vom Typ ω_σ ist also nach Satz 12 (trivial sind ja die einpunktigen Mengen $\{x\}$ bei $x \in C_\sigma^k$ abgeschlossen) ein normaler Hausdorff-Raum.

Satz 13. *Jede abgeschlossene Menge $F \subseteq C_\sigma^k$ ist der Durchschnitt $\|\omega_\sigma\|$ vieler offener Mengen $G \subseteq C_\sigma^k$.*

Satz 14. *Jede offene Menge $G \subseteq C_\sigma^k$ ist die Vereinigung $\|\omega_\sigma\|$ vieler abgeschlossener Mengen $F \subseteq C_\sigma^k$.*

5. Es sei $M \subseteq A \subseteq C_\sigma^k$; dann heiße M *in A abgeschlossen*, wenn $M' \cap A \subseteq M$ gilt; M heiße *in A offen*, falls $A \setminus M$ in A abgeschlossen ist. Es lassen sich alle Sätze aus dem Eindimensionalen wörtlich auf den k-dimensionalen Fall übertragen.

$G \subseteq C_\sigma^k$ sei eine offene Menge; dann heiße $M \subseteq C_\sigma^k$ *dicht in G*, falls $G \subseteq \boldsymbol{H}M$. Zu jeder Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ gibt es eine größte offene Menge $G_M \subseteq C_\sigma^k$, in der M dicht ist; nämlich $G_M = \boldsymbol{K}\boldsymbol{H}M$. Ist für $M \subseteq C_\sigma^k$ $G_M = C_\sigma^k$, so heiße M in C_σ^k *überall dicht*; es ist dann wegen $G_M = C_\sigma^k \subseteq \boldsymbol{H}M$ auch $\boldsymbol{H}M = C_\sigma^k$; ist $G_M = \emptyset$, so heiße M in C_σ^k *nirgends dicht*. Es lassen sich wieder alle Sätze aus dem Eindimensionalen übertragen.

Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, so heiße $\gamma_M = (\boldsymbol{H}M) \cap (\boldsymbol{H}(C_\sigma^k \setminus M))$ die *Begrenzung* von M und $\varrho_M = M \cap \gamma_M$ der *Rand* von M. Alle Sätze aus dem Eindimensionalen lassen sich sofort übertragen.

§ 8 über Borelsche Mengen läßt sich wörtlich auf den k-dimensionalen Fall übertragen.

§ 16 ω_σ-Basen

1. Eine Menge S offener Mengen $\Gamma \subseteq C_\sigma^k$ heißt *Basis von* C_σ^k, falls es zu jeder offenen Menge $G \subseteq C_\sigma^k$ ein Teilsystem $S^* \subseteq S$ gibt mit $G = \bigcup_{\Gamma \in S^*} \Gamma$. Wie im Eindimensionalen beweist man

Satz 1. *Eine Menge S offener Mengen $\Gamma \subseteq C_\sigma^k$ ist genau dann eine Basis von C_σ^k, wenn es zu jedem $x \in C_\sigma^k$ und zu jeder Umgebung $U(x)$ ein $\Gamma_0 \in S$ gibt mit*

$$x \in \Gamma_0 \subseteq U(x).$$

Man kann in Satz 1 $U(x)$ auch ersetzen durch $U(x, \varepsilon)$ bzw. $S(x, \varepsilon)$.

Satz 2. *Ist M in C_σ^k überall dicht, so ist die Menge S aller $U(a, r)$ (aller $S(a, r)$) bei $a \in M$ und $r \in R_\sigma$, $r > 0$ eine Basis von C_σ^k.*

Beweis. Sei $x \in C_\sigma^k$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$; man wähle ein $a \in M$ mit $|a^\varkappa - x^\varkappa| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\text{mit } \varrho(a, x) < \frac{\varepsilon}{3}\right)$ und ein $r \in R_\sigma$ mit $\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{2}{3}\varepsilon$. Dann ist $x \in U(a, r)$, da $|a^\varkappa - x^\varkappa| < \frac{\varepsilon}{2} < r \left(x \in S(a, r), \text{ da } \varrho(a, x) < \frac{\varepsilon}{3} < r\right)$; außerdem ist

$$U(a, r) \subseteq U(x, \varepsilon) \quad (S(a, r) \subseteq S(x, \varepsilon)),$$

da für $x' \in U(a, r)$ $(x' \in S(a, r))$ gilt

$$|x^\varkappa - x'^\varkappa| \leqq |x^\varkappa - a^\varkappa| + |a^\varkappa - x'^\varkappa| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

$$\left(\varrho(x, x') \leqq \varrho(x, a) + \varrho(a, x') < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon\right).$$

Da R_σ^k überall dicht in C_σ^k ist, gilt sofort — S heiße eine *ω_σ-Basis von C_σ^k*, falls S eine Basis von C_σ^k ist mit $\overline{\overline{S}} = \|\omega_\sigma\|$ — der

Satz 3. *Die Menge S aller $U(a, r)$ (aller $S(a, r)$) mit $a \in R_\sigma^k, r \in R_\sigma$, $r > 0$ ist eine ω_σ-Basis von C_σ^k.*

Die Existenz einer ω_σ-Basis eines transfinit-topologischen Raumes R vom Typus ω_σ kann man als *zweites Abzählbarkeitsaxiom* bezeichnen. Als *erstes Abzählbarkeitsaxiom* bezeichne man dann in R die Forderung: Für jeden Punkt $x \in R$ gibt es ein System S_x offener Mengen $\Gamma \subseteq R$ mit $x \in \Gamma$ für $\Gamma \in S_x$ und $\overline{\overline{S}}_x = \|\omega_\sigma\|$ derart, daß es zu jeder Umgebung $U(x)$ eines Punktes $x \in R$ ein $\Gamma \in S_x$ gibt mit $\Gamma \subseteq U(x)$. Jeder transfinit-metrische Raum vom Typ ω_σ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

da man für S_x die Menge der $S\left(x, \frac{1}{n}\right)$ bei $0 < n \in N_\sigma$ nehmen kann.

Ist S eine Basis von C_σ^k, so heißt jedes $\Gamma \in S$ mit $x \in \Gamma$ bei festem $x \in C_\sigma^k$ eine *S-Umgebung* von x. Wie im Eindimensionalen beweist man alle folgenden Sätze:

Satz 4. *Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, $x \in C_\sigma^k$ und S eine Basis von C_σ^k, dann ist $x \in \boldsymbol{H}M$ genau dann, wenn jede S-Umgebung von x einen Punkt von M besitzt.*

2. Satz 5. *Jede Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ besitzt nur höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele isolierte Punkte.*

Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, so nennen wir $a \in C_\sigma^k$ einen *Kondensationspunkt* von M, falls jede Umgebung U von a mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M enthält (für U kann man auch $U(a, \varepsilon)$ bzw. $S(a, \varepsilon)$ nehmen). Jeder Kondensationspunkt von M ist erst recht Häufungspunkt von M.

Satz 6. *Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, $x \in C_\sigma^k$ und S eine ω_σ-Basis von C_σ^k, so ist x Kondensationspunkt von M genau dann, wenn jede S-Umgebung von x mehr als $\|\omega_\sigma\|$ viele Punkte von M besitzt.*

Satz 7 (Satz von Lindelöf). *Ist $M \subseteq C_\sigma^k$ und M^* die Menge aller $x \in M$, die keine Kondensationspunkte von M sind, so ist $\overline{\overline{M^*}} \leqq \|\omega_\sigma\|$.*

Satz 8. *Es sei $M \subseteq C_\sigma^k$ und Φ die Menge der Kondensationspunkte von M. Dann gilt: Φ ist perfekt; $\overline{\overline{M}} \leqq \|\omega_\sigma\| \to \Phi = \varnothing$; $\overline{\overline{M}} > \|\omega_\sigma\| \to \overline{\overline{\Phi}} > \|\omega_\sigma\|$. Jeder Punkt $a \in \Phi$ ist Kondensationspunkt von Φ.*

Als Folgerung aus Satz 8 läßt sich jede abgeschlossene Menge $F \subseteq C_\sigma^k$, falls sie nicht höchstens die Mächtigkeit $\|\omega_\sigma\|$ hat, disjunkt zerlegen in eine perfekte Menge Φ_1 mit $\overline{\overline{\Phi}}_1 > \|\omega_\sigma\|$ und eine Menge Φ_2 mit $\overline{\overline{\Phi}}_2 \leqq \|\omega_\sigma\|$: $F = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Man braucht ja nur als Φ_1 die Menge der Kondensationspunkte von F zu wählen und $\Phi_2 = F \setminus \Phi_1$ zu setzen.

3. Satz 9. *S sei eine Menge offener Mengen $G \subseteq C_\sigma^k$ mit $\overline{\overline{S}} > \|\omega_\sigma\|$. Dann gibt es eine Teilmenge $S^* \subseteq S$ mit $\overline{\overline{S^*}} \leqq \|\omega_\sigma\|$ und $\bigcup_{G \in S} G = \bigcup_{G \in S^*} G$.*

4. Satz 10 (Satz von Baire-Hausdorff). *Jede wohlgeordnete wachsende oder fallende Menge von Mengen $M \subseteq C_\sigma^k$, die entweder alle abgeschlossen oder alle offen sind, enthält höchstens $\|\omega_\sigma\|$ viele verschiedene Elemente.*

Satz 11. *$(M_\alpha)_{\alpha < \omega_{\sigma+1}}$ sei eine wohlgeordnete wachsende oder fallende Folge von Mengen $M \subseteq C_\sigma^k$, die entweder alle abgeschlossen oder alle offen sind. Dann gibt es ein $\alpha < \omega_{\sigma+1}$ mit $M_\alpha = M_\beta$ für $\alpha \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$.*

Die *Ableitung α-ter Ordnung* $M^{(\alpha)}$ einer Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ definiere man folgendermaßen: $M^{(1)} = M'$; ist $1 \leqq \alpha < \omega_{\sigma+1}$, so sei $M^{(\alpha+1)} = M^{(\alpha)\prime}$; ist $1 \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$ und β Limeszahl, so sei $M^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha < \beta} M^{(\alpha)}$. Dann gilt der

Satz 12 (Satz von Cantor-Bendixson). *Für jede Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ gibt es eine erste natürliche Ordinalzahl $\alpha < \omega_{\sigma+1}$, so daß $M^{(\alpha)}$ perfekt ist und $M^{(\alpha)} = M^{(\beta)}$ gilt für $\alpha \leqq \beta < \omega_{\sigma+1}$.*

Für das $M^{(\alpha)}$ von Satz 12 gilt noch: $M^{(\alpha)} = \varnothing \to \overline{\overline{M}} \leqq \|\omega_\sigma\|$.

§ 17 Zusammenhang

1. Eine Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ heißt für $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ ($\sigma \geqq 0$) *h-unzusammenhängend*, falls es Mengen $M_1, M_2 \subseteq M$ gibt mit: $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M = M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h$; M_1, M_2 in M abgeschlossen (offen). M heißt *h-zusammenhängend*, falls M nicht h-unzusammenhängend ist. Es gelten für diesen k-dimensionalen Zusammenhang dieselben Tatsachen, wie sie in §10 im Anschluß an die Definition des h-Zusammenhanges aufgeführt wurden. Man definiert analog wie im Eindimensionalen die h-Kontinuen und h-Gebiete.

2. Es gelten wie im Eindimensionalen (Beweise analog) die folgenden Sätze:

Satz 1. *Ist* $M_1, M_2 \subseteq A \subseteq C_\sigma^k$; $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; $M \subseteq M_1 \cup M_2$; $\varrho(M_1, M_2) \geqq h \geqq 0$ *bei* $h \in C_\sigma$; M_1, M_2 *abgeschlossen (offen) in* A; M *h-zusammenhängend, so gilt:* $M \subseteq M_1$ *oder* $M \subseteq M_2$.

Satz 2. *S sei eine Menge h-zusammenhängender Mengen* $M \subseteq C_\sigma^k$ *mit* $\bigcap_{M \in S} M \neq \emptyset$. *Dann ist auch* $\bigcup_{M \in S} M$ *h-zusammenhängend.*

Satz 3. *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$ *und gibt es für jedes* $x, y \in M$ *eine h-zusammenhängende Menge* $M_{xy} \subseteq M$ *mit* $x, y \in M_{xy}$, *so ist M h-zusammenhängend.*

Satz 4. *S sei eine Menge h-zusammenhängender Mengen* $M \subseteq C_\sigma^k$; *es gebe ein* $\emptyset \neq M_0 \in S$, *so daß für jedes* $M \in S$ *stets* $M_0 \cup M$ *h-zusammenhängend ist. Dann ist* $\bigcup_{M \in S} M$ *h-zusammenhängend.*

Satz 5. *Ist* $M_1, M_2 \subseteq C_\sigma^k$; $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $h \in C_\sigma$, $h > 0$; *dann gilt:*

$$M_1 \cup M_2 \text{ h-zusammenhängend} \to \varrho(M_1, M_2) < h,$$

$$\varrho(M_1, M_2) < h \wedge M_1, M_2 \text{ h-zusammenhängend} \to M_1 \cup M_2 \text{ h-zusammenhängend.}$$

Satz 5′. *Ist* $M_1, M_2 \subseteq C_\sigma^k$; $\sigma > 0$; $M_1, M_2 \neq \emptyset$; $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; *dann gilt:*

$$M_1 \cup M_2 \text{ h-zusammenhängend} \to \varrho(M_1, M_2) \begin{cases} = 0, \text{ falls } h = 0, \\ < h, \text{ falls } h > 0, \end{cases}$$

$$\varrho(M_1, M_2) \begin{cases} = 0, \text{ falls } h = 0 \\ < h, \text{ falls } h > 0 \end{cases} \wedge M_1, M_2, \text{h-zusammenhängend} \to M_1 \cup M_2 \text{ h-zusammenhängend.}$$

Satz 6. *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, M *h-zusammenhängend,* $M \subseteq M^* \subseteq HM$; *dann ist auch* M^* *h-zusammenhängend.*

Satz 7. *Ist* $\emptyset \neq M \subseteq C_\sigma^k$, M *h-zusammenhängend bei* $h > 0$,

$$M \subseteq M^* \subseteq S(M, h);$$

dann ist auch M^* *h-zusammenhängend.*

Als Folgerungen aus Satz 7 ergeben sich: Ist $a \in C_\sigma^k$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$; dann ist jede offene Menge $G \subseteq S(a, \varepsilon)$ ein ε-Gebiet, also speziell $S(a, \varepsilon)$ selbst; jede ab-

geschlossene Menge $F \subseteq S(a, \varepsilon)$ ist ein ε-Kontinuum. Ist $\emptyset \neq M \subseteq C_\sigma^k$, $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$, M ε-zusammenhängend; dann ist jede offene Menge $G \subseteq S(M, \varepsilon)$ ein ε-Gebiet, also speziell $S(M, \varepsilon)$ selbst; jede abgeschlossene Menge $F \subseteq S(M, \varepsilon)$ ist ein ε-Kontinuum.

3. Eine endliche Folge $a_0, a_1, \ldots, a_t$ von Punkten $a_\tau \in C_\sigma^k$ $(0 \leqq \tau \leqq t)$ heißt eine a_0 *und* a_t *verbindende* ε*-Kette*, falls $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ und $\varrho(a_\tau, a_{\tau+1}) < \varepsilon$ $(0 \leqq \tau \leqq t-1)$ gilt. $M \subseteq C_\sigma^k$ heißt ε*-verbunden*, falls $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ und es für jedes $a, b \in M$ eine a und b verbindende ε-Kette $a = a_0, a_1, \ldots, a_t = b$ gibt mit $a_\tau \in M$ $(0 \leqq \tau \leqq t)$. $M \subseteq C_\sigma^k$ heißt h*-verkettet*, falls $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ und M für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \geqq h$ ε-verbunden ist. Für $h = 0$ erhält man den klassischen Begriff der verketteten Menge. Für $h > 0$ ist die Definition der h-verketteten Menge identisch mit der Definition: $M \subseteq C_\sigma^k$ heißt h-verkettet, falls $h \in C_\sigma$, $h > 0$ und jedes $a, b \in M$ durch eine h-Kette innerhalb M verbunden werden kann. Wie im Eindimensionalen beweist man dann den

Satz 8. a) *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; *dann gilt*: M *h-zusammenhängend* $\rightarrow$ M *h-verkettet.* b) *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, $h \in C_\sigma$, $h > 0$; *dann gilt*: M *h-verkettet* $\rightarrow$ M *h-zusammenhängend.*

4. Kommen wir nun zum Begriff der h-Komponenten. Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, $a \in M$, so heißt für festes $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ die Vereinigung $M_a^{(h)}$ aller h-zusammenhängenden Mengen $M^* \subseteq M$ mit $a \in M^*$ die *h-Komponente von a in M*. $K \subseteq M$ heißt *h-Komponente von M*, falls es ein $a \in M$ gibt mit $K = M_a^{(h)}$. Wegen $a \in M_a^{(h)}$ ist stets $M_a^{(h)} \neq \emptyset$. $M_a^{(h)}$ ist selbst h-zusammenhängend und ist damit die größte h-zusammenhängende Menge $M^* \subseteq M$ mit $a \in M^*$. Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, $a \in M$, $b \in M$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so gilt sofort: $M_a^{(h)} = M_b^{(h)} \leftrightarrow M_a^{(h)} \cap M_b^{(h)} \neq \emptyset$. Daraus folgt dann der

Satz 9. *Jede nicht leere Menge* $M \subseteq C_\sigma^k$ *zerfällt für festes* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ *disjunkt und erschöpfend in ihre h-Komponenten.*

Die h-Komponenten einer Menge $\emptyset \neq M \subseteq C_\sigma^k$ kann man wieder als die größten h-zusammenhängenden Teilmengen von M auffassen. Für $\sigma > 0$ sind die 0-Komponenten einer Menge $\emptyset \neq M \subseteq C_\sigma^k$ die Einermengen $\{x\}$ mit $x \in M$. Wie im eindimensionalen Fall beweist man

Satz 10. *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *sind* K_1, K_2 *h-Komponenten von* M *mit* $K_1 \neq K_2$; *dann ist* $\varrho(K_1, K_2) \geqq h$.

Satz 11. a) *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, K *h-Komponente von* M; *dann ist* K *in* M *abgeschlossen.* b) *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, $h \in C_\sigma$, $h > 0$, K *h-Komponente von* M; *dann ist* K *in* M *offen.*

Aus Satz 11 folgt sofort: Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so ist jede h-Komponente von C_σ^k ein h-Kontinuum, für $h > 0$ auch noch ein h-Gebiet. Für $h > 0$ ist also die Begrenzung γ_K jeder h-Komponente K von C_σ^k leer. Man hat weiterhin: Ist $M \subseteq C_0^k$, M offen bzw. abgeschlossen, $h \in C_0$, $h \geqq 0$; dann ist jede h-Komponente von M ein h-Gebiet bzw. h-Kontinuum. Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, M offen bzw. abgeschlossen, $h \in C_\sigma$, $h > 0$; dann ist jede h-Komponente von M ein h-Gebiet bzw. h-Kontinuum. Da die Menge der h-Komponenten einer offenen Menge $M \subseteq C_\sigma^k$ $(\sigma = 0, h \geqq 0$ oder $\sigma \geqq 0$, $h > 0)$ gleichmächtig einer Teilmenge von R_σ^k ist,

gilt noch: Ist $M \subseteq C_0^k$, M offen, $h \in C_0$, $h \geqq 0$; dann ist M die Vereinigung höchstens $\|\omega_0\|$ vieler disjunkter h-Gebiete. Ist $M \subseteq C_\sigma^k$, M offen, $h \in C_\sigma$, $h > 0$; dann ist M die Vereinigung höchstens $\|\omega_\sigma\|$ vieler disjunkter h-Gebiete.

Satz 12. *Ist* $M_1 \subseteq M_2 \subseteq C_\sigma^k$, $a \in M_1$, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; *dann ist* $M_{1a}^{(h)} \subseteq M_{2a}^{(h)}$. *Ist* $M \subseteq C_\sigma^k$, $a \in M$; $h_1, h_2 \in C_\sigma$; $0 \leqq h_1 \leqq h_2$; *dann ist* $M_a^{(h_1)} \subseteq M_a^{(h_2)}$.

Satz 13. *Ist* $a \in C_\sigma^k$, $h \in C_\sigma$, $h > 0$ *und* K *die Menge aller* $x \in C_\sigma^k$, *für die es ein* $0 < n \in N_0$ *gibt mit* $a - n \cdot h \leqq x \leqq a + n \cdot h$ — *also* $K = \bigcup_{0<n\in N_0} \langle a - n \cdot h, a + n \cdot h\rangle$, *dann ist* $K = C_{\sigma a}^{k(h)}$.

Beweis. $a - nh \leqq x \leqq a + nh$ bedeute: $a^\varkappa - nh \leqq x^\varkappa \leqq a^\varkappa + nh$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$; $\langle a - nh, a + nh\rangle$ ist das Intervall $\langle a_1, a_2\rangle$ mit $a_1{}^\varkappa = a^\varkappa - nh$, $a_2{}^\varkappa = a^\varkappa + nh$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$. Durch Zerlegung von $\langle a^\varkappa - nh, a^\varkappa + nh\rangle$ $(n > 0$, $1 \leqq \varkappa \leqq k)$ in lauter kleine (endlich viele) Intervalle der Seitenlänge $\frac{h}{k}$, die ja h-zusammenhängend sind, erhält man schließlich für jedes $0 < n \in N_0$ den h-Zusammenhang von $\langle a^\varkappa - nh, a^\varkappa + nh\rangle$. Wegen $K = \bigcup_{0<n\in N_0} \langle a - nh, a + nh\rangle$ ist also K h-zusammenhängend; also $K \subseteq C_{\sigma a}^{k(h)}$. Wäre nun $C_{\sigma a}^{k(h)} \setminus K \neq \emptyset$, so wäre $\varrho(K, C_{\sigma a}^{k(h)} \setminus K) \geqq h$ (da für $x \in K$, $y \in C_\sigma{}^k \setminus K$ gilt: $\varrho(x, y) \geqq h$), also nach Satz 5: $C_{\sigma a}^{k(h)} = K \cup (C_{\sigma a}^{k(h)} \setminus K)$ h-unzusammenhängend; Widerspruch; also $C_{\sigma a}^{k(h)} \subseteq K$, also $K = C_{\sigma a}^{k(h)}$.

Satz 14. a) *Ist* $h \in C_0$, $h \geqq 0$ *und* K *eine* h-*Komponente von* C_0^k; *dann ist* $K = C_0^k$. b) *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$ *und* K *eine* h-*Komponente von* C_σ^k; *dann gilt: Es gibt* $u^\varkappa, v^\varkappa \in U_\sigma$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ *mit* $-\infty_\sigma < u^\varkappa < u^\varkappa < +\infty_\sigma$ *und* $K = (u, v)$ *bei* $u = [u^1, \ldots, u^k]$, $v = [v^1, \ldots, v^k]$. *Es ist*

$$\varrho(K, C_\sigma^k \setminus K) = \delta(K) > 0 \quad \textit{und} \quad \delta(K) = \bar{\delta}(h).$$

Beweis. a) C_0^k ist bekanntlich 0-zusammenhängend, also auch h-zusammenhängend für jedes $h \geqq 0$, also $C_0^k \subseteq K$, also $K = C_0^k$. b) Es gibt ein $a \in C_\sigma^k$ mit $K = C_{\sigma a}^{k(h)} = \bigcup_{0<n\in N_0} \langle a - nh, a + nh\rangle$. Dann ist $a^\varkappa - \omega h < x^\varkappa < a^\varkappa + \omega h$ für alle $x \in K$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, also ist K beschränkt; $u^\varkappa$, $v^\varkappa$ sind dann die untere bzw. obere Grenze aller $x^\varkappa$ bei $x \in K$. $\delta(K)$ ist die obere Grenze aller $\varrho(x, y)$ mit $x, y \in K$, also $n \cdot h \leqq \delta(K)$; für jedes $x, y \in K$ gibt es aber ein $n_0 \in N_0$ mit $x, y \in \langle a - n_0 h$, $a + n_0 h\rangle$, also $\varrho(x, y) \leqq 2n_0 kh$, also $\delta(K) = \bar{\delta}(h)$; damit ist auch $\delta(K) > 0$. Wäre $\varrho(K, C_\sigma^k \setminus K) < \delta(K)$, so gäbe es Punkte $x \in K$, $y \in C_\sigma^k \setminus K$ mit $\varrho(x, y) < \delta(K)$; es gibt dann ein $n_0 \in N_0$ mit $\varrho(x, y) \leqq n_0 \cdot h$, also auch ein $n_1 \in N_0$ mit

$$x, y \in \langle a - n_1 h, a + n_1 h\rangle,$$

also $y \in K$; Widerspruch. Wäre $\varrho(K, C_\sigma^k \setminus K) > \delta(K)$, so wähle man ein $y^1 \in C_\sigma$ mit $\varrho(K, C_\sigma^k \setminus K) > y_1 > \delta(K)$ und ein $x \in K$. Dann ist wegen $\delta(K) < y^1$ für den Punkt z mit $z^1 = x^1 + y^1$, $z^\varkappa = x^\varkappa$ für $1 < \varkappa \leqq k$: $z \in C_\sigma^k \setminus K$. Wegen

$$\varrho(x, z) = y^1 < \varrho(K, C_\sigma^k \setminus K)$$

wäre dann $\varrho(x, z) < \varrho(K, C_\sigma^k \setminus K)$; Widerspruch. Also ist schließlich

$$\varrho(K, C_\sigma^k \setminus K) = \delta(K).$$

Satz 15. *Ist* $h_1, h_2 \in C_\sigma$; $\sigma > 0$; $h_1, h_2 > 0$; K_1 *h_1-Komponente von* C_σ^k *und* K_2 *h_2-Komponente von* C_σ^k *mit* $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$; *dann gilt*:

a) $K_1 = K_2 \leftrightarrow \underline{\delta}(h_2) < h_1 < \bar{\delta}(h_2) = \delta(K_2)$,

b) $K_1 = K_2 \leftrightarrow \underline{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2) \leftrightarrow \delta(K_1) = \bar{\delta}(h_1) = \bar{\delta}(h_2) = \delta(K_2)$.

Satz 16. *Es sei* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$. *Dann ist jede h-zusammenhängende Menge* $M \subseteq C_\sigma^k$ *in einer h-Komponente von* C_σ^k *enthalten. Für* $\sigma > 0$ *sind die 0-zusammenhängenden Mengen genau* $\emptyset$ *und* $\{a\}$ *bei* $a \in C_\sigma^k$. *Ist* $\sigma > 0$, $h > 0$ *und* $K = (u, v)$ *eine h-Komponente von* C_σ^k, *so sind h-zusammenhängende Mengen* $M \subseteq K$ *die folgenden*:

$$\emptyset;\ \{a\} \text{ für } a \in K;\ \langle a, b\rangle,\ (a, b),\ \langle a, b),\ (a, b\rangle$$
$$\text{bei } a, b \in D_\sigma^k \text{ und } u^\varkappa \leqq a^\varkappa < b^\varkappa \leqq v^\varkappa\ (1 \leqq \varkappa \leqq k).$$

Beweis. Nach Satz 2 und 3 braucht Satz 16 nur noch für eindimensionale Strecken $\langle a, b\rangle \subseteq K$ bewiesen zu werden, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen (man kann ja zwei Punkte von K stets durch so einen Kantenweg verbinden). Für diese Strecken verläuft der Beweis ähnlich dem im eindimensionalen Fall.

Satz 17. *Ist* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *sind* K_1 *und* K_2 *h-Komponenten von* C_σ^k *und ist* $a \in K_1$; *dann gilt* $\varrho(a, K_2) = \varrho(K_1, K_2)$.

Satz 18. *Ist für festes* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ *die Menge aller h-Komponenten von* C_σ^k, *dann gilt*: *Für* $\sigma = 0$ *ist* $\overline{\overline{\mathfrak{K}_k^{(h)}}} = 1$, *für* $\sigma > 0$, $h > 0$ *ist* $\overline{\overline{\mathfrak{K}_k^{(h)}}} = \|\omega_\sigma\|$. *Ist* $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ *bei* $\sigma > 0$, $h > 0$ *mit* $K_1 \neq K_2$, *so ist* $\delta(K_1) = \delta(K_2) = \bar{\delta}(h)$, $\varrho(K_1, K_2) \geqq \bar{\delta}(h)$ *und* $\varrho(K_1, K_2) \in U_\sigma$.

Beweis. Sämtliche Behauptungen außer $\varrho(K_1, K_2) \in U_\sigma$ beweisen sich analog zum eindimensionalen Fall. Nun zu $\varrho(K_1, K_2) \in U_\sigma$: Ist $a \in K_1$, $b \in K_2$, so ist $K_1 = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle a - nh, a + nh\rangle$ und $K_2 = \bigcup_{0 < n \in N_0} \langle b - nh, b + nh\rangle$. Man kann a und b so wählen, daß für jedes $\varkappa$ mit $1 \leqq \varkappa \leqq k$ gilt: $a^\varkappa = b^\varkappa$ oder $a^\varkappa + nh < b^\varkappa - nh$ für jedes $n \in N_0$ oder $b^\varkappa + nh < a^\varkappa - nh$ für jedes $n \in N_0$. Dann ist $\varrho(K_1, K_2)$ die untere Grenze aller $\varrho(a_n, b_n)$ $(0 < n \in N_0)$, wobei gilt:

$$a_n^\varkappa = \begin{cases} a^\varkappa, & \text{falls } a^\varkappa = b^\varkappa, \\ a^\varkappa + nh, & \text{falls } a^\varkappa < b^\varkappa, \\ a^\varkappa - nh, & \text{falls } a^\varkappa > b^\varkappa, \end{cases} \qquad b_n^\varkappa = \begin{cases} b^\varkappa, & \text{falls } b^\varkappa = a^\varkappa, \\ b^\varkappa + nh, & \text{falls } b^\varkappa < a^\varkappa, \\ b^\varkappa - nh, & \text{falls } b^\varkappa > a^\varkappa. \end{cases}$$

Also ist $\varrho(K_1, K_2) \in U_\sigma$.

Man nenne für $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ s einen *h-Kantenzug*, falls 1) $s = \{a\}$ ist bei $a \in C_\sigma^k$; oder falls 2) für $h = 0$ $s = s_1 \cup s_2 \cup \cdots \cup s_n$ ist, wobei die s_r $(1 \leqq r \leqq n \in N_0)$ achsenparallele h-Strecken mit mindestens 2 Punkten sind und wobei s_r und s_{r+1}

einen Endpunkt gemeinsam haben; oder falls 3) für $h > 0$ $s = s_1 \cup s_2 \cup \cdots \cup s_n$ ist, wobei die s_r $(1 \leqq r \leqq n \in N_0)$ achsenparallele h-Strecken mit mindestens 2 Punkten sind und wobei s_r und s_{r+1} je einen Endpunkt E_r bzw. E_{r+1} besitzen mit

$$\varrho(E_r, E_{r+1}) < h.$$

Wie im Eindimensionalen beweist man dann

Satz 19. *Ist $G \subseteq C_\sigma^k$, G offen, $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$; dann ist G ein h-Gebiet genau dann, wenn sich stets zwei Punkte $a, b \in G$ durch einen ganz in G gelegenen h-Kantenzug verbinden lassen.*

§ 18 Algebraische Struktur der k-dimensionalen Komponenten

1. Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so bezeichne man mit $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ die Menge aller h-Komponenten von C_σ^k; die *Nullkomponente* $\Lambda_k^{(h)}$ sei dasjenige $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ mit $\underbrace{[0, \ldots, 0]}_{k\text{-mal}} \in K$.

Sind $h_1, h_2 \in C_\sigma$, $h_1, h_2 \geqq 0$, so heiße $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ (*unmittelbarer*) *Vorgänger* von $\mathfrak{K}_k^{(h_2)}$ bzw. $\mathfrak{K}_k^{(h_2)}$ (*unmittelbarer*) *Nachfolger* von $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$, falls für jedes $K_1 \in \mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ und $K_2 \in \mathfrak{K}_k^{(h_2)}$ mit $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ gilt:

1) $K_1 \subset K_2$,

2) Es gibt kein $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so daß für ein $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ gilt: $K_1 \subset K \subset K_2$.

Dies ist gleichbedeutend damit, daß für die Nullkomponenten $\Lambda_k^{(h_1)}$, $\Lambda_k^{(h_1)}$ gilt:

1) $\Lambda_k^{(h_1)} \subset \Lambda_k^{(h_2)}$,

2) Es gibt kein $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so daß $\Lambda_k^{(h_1)} \subset \Lambda_k^{(h)} \subset \Lambda_k^{(h_2)}$ ist.

Dies ist für $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ gleichbedeutend damit, daß gilt:

$$\bar{\delta}(h_1) = \underline{\delta}(h_2).$$

Man beweist wie im Eindimensionalen den

Satz 1. *Ist $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$; dann gibt es $h_1, h_2 \in C_\sigma$ mit $h_1, h_2 > 0$, so daß $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ Vorgänger von $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ und $\mathfrak{K}_k^{(h_2)}$ Nachfolger von $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ ist. $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ besitzt auch höchstens einen Vorgänger und höchstens einen Nachfolger.*

Aus dem Beweis entnimmt man wieder, daß in C_σ^k bei $\sigma > 0$ die Komponentenmengen

$$\ldots, \mathfrak{K}_k^{\left(\frac{1}{\omega^n}\right)}, \ldots, \mathfrak{K}_k^{\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}, \mathfrak{K}_k^{\left(\frac{1}{\omega}\right)}, \mathfrak{K}_k^{(1)}, \mathfrak{K}_k^{(\omega)}, \mathfrak{K}_k^{(\omega^2)}, \ldots, \mathfrak{K}_k^{(\omega^n)}, \ldots$$

bei $n \in N_0$ unmittelbar einander folgen bzw. vorhergehen. Wie im Eindimensionalen kann man eine irreflexive Ordnung „$<$“ zwischen den $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ aus C_σ^k einführen.

Ist $\mathfrak{B}_\sigma^k$ die Menge aller Vereinigungsmengen von Mengen $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_k^{(h)}$ (bezüglich C_σ^k), so ist sofort $[\mathfrak{B}_\sigma^k, \cap, \cup, \varnothing, C_\sigma^k]$ eine vollständige atomistische Boolesche Algebra mit Null- und Einselement, deren Atome gerade die h-Komponenten von C_σ^k sind.

2. Für $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$ läßt sich $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ eineindeutig abbilden auf die Menge aller k-Tupel von h-Komponenten von C_σ derart, daß einem $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ zugeordnet ist

das k-Tupel $[K^1, \ldots, K^k]$ (wobei die $K^\varkappa$ h-Komponenten von C_σ sind) mit $x = [x^1, \ldots, x^k] \in C_\sigma^k \rightarrow x \in K \leftrightarrow x^1 \in K^1 \wedge \cdots \wedge x^k \in K^k$. Die $K^\varkappa$ nennen wir die *Komponenten von* K. Für $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ definiere man die *Summe* $K_1 + K_2$ als dasjenige $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ mit $K^\varkappa = K_1^\varkappa + K_2^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$. Aus Satz 4 von § 11 folgt dann der

Satz 2. *Ist* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *so ist* $[\mathfrak{K}_k^{(h)}, +, \Lambda_k^{(h)}]$ *eine abelsche Gruppe.*

Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so definiere man für $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ und $r \in R_0$ das *Produkt* $K \cdot r = r \cdot K$ als dasjenige $L \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ mit $L^\varkappa = r \cdot K^\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq k$. Aus Satz 5 von § 11 folgt

Satz 3. *Ist* $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, *so bildet* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ *über dem Körper* R_0 *der (endlichen) rationalen Zahlen einen Vektorraum.*

3. Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, so kann man in $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ eine *Metrik* ϱ^* einführen als

$$\varrho^*(K_1, K_2) = \sum_{\varkappa=1}^{k} |K_1^\varkappa - K_2^\varkappa|.$$

Es gilt dann sofort: $\varrho^*(K_1, K_2) \geqq \Lambda^{(h)}$, $\varrho^*(K_1, K_2) = \Lambda^{(h)} \leftrightarrow K_1 = K_2$, $\varrho^*(K_1, K_2) = \varrho^*(K_2, K_1)$, $\varrho^*(K_1, K_2) + \varrho^*(K_2, K_3) \geqq \varrho^*(K_1, K_3)$. Wie im Eindimensionalen gilt der

Satz 4. *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$, *sind* $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, *ist* $K \in \mathfrak{K}^{(h)}$ *mit* $K = (u, v)$; *dann gilt*:

$$\varrho^*(K_1, K_2) = K \leftrightarrow \begin{cases} 0 = \varrho(K_1, K_2) \wedge v = \delta(K_1 \cup K_2), \text{ falls } K = \Lambda^{(h)}, \\ u = \varrho(K_1, K_2) \wedge v = \delta(K_1 \cup K_2), \text{ falls } K \neq \Lambda^{(h)}. \end{cases}$$

Die Bemerkungen im Anschluß an Satz 9 aus § 11 lassen sich analog übertragen.

4. Wir kommen nun zur Relativierung der bisher durchgeführten strukturellen Betrachtungen. Es sei $h, h_1 \in C_\sigma$ mit $h \geqq h_1 \geqq 0$. Ist $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, so bezeichne man mit $\mathfrak{K}_{k\,K}^{(h_1)}$ die Menge aller $L \in \mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ mit $L \subseteq K$. Wir studieren dann die strukturellen Eigenschaften der $\mathfrak{K}_{k\,K}^{(h_1)}$ bei $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$. Zunächst ist bei $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ und $K_1 \neq K_2$: $\mathfrak{K}_{k\,K_1}^{(h_1)} \cap \mathfrak{K}_{k\,K_2}^{(h_1)} = \varnothing$. Außerdem gibt es für jedes $L \in \mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ ein $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ mit $L \subseteq K$ (da L auch h-zusammenhängend ist); also dann $L \in \mathfrak{K}_{k\,K}^{(h_1)}$ für dieses K. Es ist weiterhin $\bigcup \mathfrak{K}_{k\,K}^{(h_1)} = K$; also ist $\mathfrak{K}_{k\,K}^{(h_1)}$ die eindeutig bestimmte disjunkte und erschöpfende Einteilung von K in seine h_1-Komponenten. Wegen $\Lambda_k^{(h_1)} \subseteq \Lambda_k^{(h)}$ ist $\Lambda_k^{(h_1)} \in \mathfrak{K}_{k\,\Lambda_k^{(h)}}^{(h_1)}$.

Man erhält sofort: Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ und $\mathfrak{B}_{\sigma K}^k$ die Menge aller Vereinigungsmengen von Mengen $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_{k\,K}^{(h_1)}$; dann ist $[\mathfrak{B}_{\sigma K}^k \cap, \cup, \varnothing, K]$ eine vollständige, atomistische Boolesche Algebra mit Null- und Einselement, deren Atome gerade die h_1-Komponenten von K sind.

Wie im Eindimensionalen beweist man die folgenden Sätze:

Satz 5. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$; *dann ist* $\left[\mathfrak{K}_{k\,\Lambda_k^{(h)}}^{(h_1)}, +, \Lambda_k^{(h_1)}\right]$ *eine abelsche Gruppe.*

Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, so erhält man aus den Gruppeneigenschaften von $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ und $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ weiterhin: Die Mengen $\mathfrak{K}_K^{(h_1)}$ bei $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ sind die Nebenklassen der Untergruppe $\mathfrak{K}_{k\,\Delta_k^{(h)}}^{(h_1)}$ der Gruppe $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$.

Satz 6. *Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, so bildet $\mathfrak{K}_{k\,\Delta_k^{(h)}}^{(h_1)}$ über dem Körper R_0 der (endlichen) rationalen Zahlen einen Vektorraum.*

Es gelten analoge Bemerkungen wie im Anschluß an Satz 11 aus § 11.

§ 19 Topologische Struktur der k-dimensionalen Komponenten

1. Wir wenden uns zunächst den Überdeckungssätzen für k-dimensionale Komponenten zu.

In den folgenden Sätzen kann man stets auch $S(x, \varepsilon_x)$, statt $U(x, \varepsilon_x)$, nehmen. Analog wie im eindimensionalen Fall beweist man:

Satz 1. *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, ist $M \subseteq \langle a, b\rangle$ bei $a, b \in K$ mit $a^\varkappa < b^\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ und ist jedem Punkt $x \in M$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ mit $\varepsilon_x \geqq d > \underline{\delta}(h)$ bei festem $d \in C_\sigma$ zugeordnet, so gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{N}$ solcher Umgebungen mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

Satz 2. *Ist $h \in C_\sigma$, $h > 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Intervallen $\langle x, y\rangle$ mit $x, y \in K$. Dann gilt:*

a) $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_0|$ *$\to \bigcup \mathfrak{M}$ beschränkt in K; $\bigcup \mathfrak{M}$ in K unbeschränkt* $\to \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqq \|\omega_0\|$.

b) *Ist $\mathfrak{M}$ außerdem disjunkt bis höchstens auf Randpunkte und ist für $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ stets $y^\varkappa - x^\varkappa > \underline{\delta}(h)$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_0\|$; gibt es dazu noch ein $d \in C_\sigma$, $d > \underline{\delta}(h)$, so daß für $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{M}$ stets $y^\varkappa - x^\varkappa \geqq d$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ ist, so gilt:*

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} < \|\omega_0\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ in } K \text{ beschränkt},$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \|\omega_0\| \leftrightarrow \bigcup \mathfrak{M} \text{ in } K \text{ unbeschränkt}.$$

Satz 3. *Ist $h \in C_\sigma$, $h > 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$; dann gibt es für jedes $\varepsilon \in C_\sigma$, $\underline{\delta}(h) < \varepsilon < \bar{\delta}(h)$ ein ε-Netz $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ über K; d. h. eine Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ von Intervallen $\langle a, b\rangle \subseteq K$ mit $b^\varkappa - a^\varkappa = \varepsilon$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ derart, daß zwei Intervalle aus $\mathfrak{N}_\varepsilon^k$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben und $K \subseteq \bigcup \mathfrak{N}_\varepsilon^k$ gilt.*

Satz 4 (Lindelöfscher Überdeckungssatz). *Ist $h \in C_\sigma$, $h \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ und ist jedem Punkt x einer beliebigen Menge $M \subseteq K$ eindeutig eine Umgebung $U(x, \varepsilon_x)$ mit $\varepsilon_x > \underline{\delta}(h)$ zugeordnet, dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\mathfrak{N}$ solcher Umgebungen mit $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.*

2. Von nun an verlaufen die Betrachtungen vorwiegend in den C_σ^k mit $\sigma > 0$, da in den C_0^k keine Umgebungen von h-Komponenten existieren. Es sei $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, $E \in \mathfrak{K}^{(h)}$ mit $E > \Lambda^{(h)}$; dann sei die (*sphärische*) *E-Umgebung* $S(K, E)$ von K die Menge aller $X \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ mit $\varrho^*(K, X) < E$. Eine Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}_k^{(h)}$ heißt *offen*, falls jeder Punkt $K \in \mathfrak{M}$ eine E-Umgebung $S(K, E) \subseteq \mathfrak{M}$ besitzt. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}_k^{(h)}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathfrak{K}_k^{(h)} \setminus \mathfrak{M}$ offen ist. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}_k^{(h)}$ ist *Umgebung* von $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, falls $K \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ offen ist. Wir sparen

uns, kubische E-Umgebungen $U(K, E)$ einzuführen. Es sind sofort $\varnothing$ und $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ offen. Die Vereinigung jeder Menge offener Mengen und der Durchschnitt jeder nicht leeren endlichen Menge offener Mengen sind offen. Es gilt also der

Satz 5. *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$; *dann bildet* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ *einen topologischen Raum.*

Analog zum eindimensionalen Fall beweist man:

Satz 6. *Ist* $h \in C_\sigma, \sigma > 0, h \geqq 0$; *dann ist der topologische Raum* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ *ein normaler* Hausdorff-*Raum.*

Satz 7. *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h > 0$; *dann genügt der topologische Raum* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ *dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

3. Ist $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $L \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, $K \in \mathfrak{K}_{kL}^{(h_1)}$, $E \in \mathfrak{K}_{\Lambda^{(h)}}^{(h_1)}$, $E > \Lambda^{(h_1)}$, so definiere man die (*sphärische*) E-*Umgebung* $S(K, E)$ von K als Menge aller $X \in \mathfrak{K}_{kL}^{(h_1)}$ mit $\varrho^*(K, X) < E$. Wie üblich definiert man die Begriffe „offen", „abgeschlossen", „Umgebung". Es gelten wieder die Sätze:

Satz 8. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$; *dann bildet* $\mathfrak{K}_{kK}^{(h_1)}$ *einen topologischen Raum.*

Satz 9. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$; *dann ist der topologische Raum* $\mathfrak{K}_{kK}^{(h_1)}$ *ein normaler* Hausdorff-*Raum.*

Satz 10. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 > 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$; *dann genügt der topologische Raum* $\mathfrak{K}_{kK}^{(h_1)}$ *dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

Satz 11. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 > 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ *und ist* $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ *unmittelbarer Vorgänger von* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$; *dann genügt der topologische Raum* $\mathfrak{K}_{kK}^{(h_1)}$ *dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom (besitzt eine abzählbare Basis).*

Der Raum $\mathfrak{K}_{kK}^{(h_1)}$ von Satz 11 läßt sich nach dem ersten Urysohnschen Metrisationssatz metrisieren.

Satz 12 (Lindelöfscher Überdeckungssatz). *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h, h_1 > 0$, $K \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$, *ist* $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ *unmittelbarer Vorgänger von* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$, *ist* $M \subseteq \mathfrak{K}_{kK}^{(h_1)}$ *und ist schließlich jedem Punkt* $X \in M$ *eine Umgebung* $S(X, E_x)$ *zugeordnet; dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge* $\mathfrak{N}$ *solcher Umgebungen mit* $M \subseteq \bigcup \mathfrak{N}$.

4. An topologisch-algebraischen Strukturen haben wir folgende:

Satz 13. a) *Ist* $h \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq 0$; *dann ist* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$ *eine topologische abelsche Gruppe.* b) *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq h_1 \geqq 0$, $h_1 < \underline{\delta}(h)$; *dann ist* $\mathfrak{K}_{k\Lambda_k^{(h)}}^{(h_1)}$ *eine topologische abelsche Gruppe.*

Beweis. Sei $K, L, K_0, L_0 \in \mathfrak{K}_k^{(h)}$ $\left(\text{bzw. } \mathfrak{K}_{k\Lambda_k^{(h)}}^{(h_1)}\right)$ und $E \in \mathfrak{K}^{(h)}$ $\left(\text{bzw. } \mathfrak{K}_{\Lambda^{(h)}}^{(h_1)}\right)$ und $E > \Lambda^{(h)}$ (bzw. $\Lambda^{(h_1)}$); dann ist für $K \in S\left(K_0, \frac{E}{2k}\right)$, $L \in S\left(L_0, \frac{E}{2k}\right)$:

$|K^\varkappa - K_0^\varkappa|$, $|L^\varkappa - L_0^\varkappa| < \frac{E}{2k}$, also

$$|(K^\varkappa + L^\varkappa) - (K_0^\varkappa + L_0^\varkappa)| \leqq |K^\varkappa - K_0^\varkappa| + |L^\varkappa - L_0^\varkappa| < \frac{E}{k},$$

also $(K + L) \in S(K_0 + L_0, E)$. Es ist für $K \in S\left(K_0, \frac{E}{k}\right)$: $(-K) \in S(-K_0, E)$.

Satz 14. *Ist* $h, h_1 \in C_\sigma$, $\sigma > 0$, $h \geqq h_1 > 0$ *und ist* $\mathfrak{K}_k^{(h_1)}$ *unmittelbarer Vorgänger von* $\mathfrak{K}_k^{(h)}$; *dann ist* $\mathfrak{K}_{k\,\Lambda_k^{(h)}}^{(h_1)}$ *ein topologischer Vektorraum über dem Körper* R_0 *der (endlichen) rationalen Zahlen.*

Beweis. Es ist

$$|rK^\varkappa - r_0 K_0^\varkappa| \leqq |r - r_0|\,|K^\varkappa| + |r_0|\,|K^\varkappa - K_0^\varkappa| \leqq |r - r_0| \cdot \left(|K_0^\varkappa| + \frac{|K_0^\varkappa|}{2}\right) + \\ + |r_0|\,|K^\varkappa - K_0^\varkappa|$$

für $|K^\varkappa - K_0^\varkappa| < \frac{|K_0^\varkappa|}{2}$ und $K_0^\varkappa \neq \Lambda^{(h_1)}$. Für jedes zugelassene $E > \Lambda^{(h_1)}$ gibt es dann ein $n \in N_0$, $n > 0$ mit $\frac{E}{n}|r_0| < \frac{E}{2k}$, $\frac{|K_0^\varkappa| + \frac{|K_0^\varkappa|}{2}}{n} < \frac{E}{2k}$. Dann ist also für $K \in S\left(K_0, \min\left\{\frac{|K_0^1|}{2}, \cdots, \frac{|K_0^k|}{2}, \frac{E}{n}\right\}\right)$ und $|r - r_0| < \frac{1}{n}$: $|rK^\varkappa - r_0 K_0^\varkappa| < \frac{E}{k}$, also $rK \in S(rK_0, E)$. Ist $K_0 = \Lambda_k^{(h_1)}$, also jedes $K_0^\varkappa = \Lambda^{(h_1)}$, so ist $rK \in S(rK_0, E)$ für $|r - r_0| < 1$ und $K \in S\left(K_0, \frac{E}{k}\right)$. Ist $K_0 \neq \Lambda_k^{(h_1)}$, aber mindestens ein $K_0^\varkappa = \Lambda^{(h_1)}$, so nehme man nur für diejenigen $\varkappa$ mit $K_0^\varkappa \neq \Lambda^{(h_1)}$ in min $\{\cdots\}$ (s. o.) den Term $\frac{|K_0^\varkappa|}{2}$ auf, dafür aber zusätzlich noch den Term $\frac{E}{k}$; man hat dann für

$$K \in S\left(K_0, \min\left\{\frac{|K_0^{\varkappa_1}|}{2}, \ldots, \frac{|K_0^{\varkappa_l}|}{2}, \frac{E}{n}, \frac{E}{k}\right\}\right) (1 \leqq l < k)$$

und $|r - r_0| < \frac{1}{n}$: $rK \in S(rK_0, E)$.

In der gleichen Schriftenreihe erschien:

Heft 6

A. M. JAGLOM

Einführung in die Theorie der stationären Zufallsfunktionen

Übersetzung aus dem Russischen; deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von Herbert Goering.
1959. VIII, 177 Seiten — 8 Abbildungen — gr. 8° — DM 24,—

Das Buch enthält eine ausführliche Übersicht über die Korrelationstheorie stationärer Zufallsfunktionen, in der die Spektralzerlegung dieser Funktionen eine zentrale Stellung einnimmt. Die mathematischen Sätze werden an Hand von Beispielen erläutert und physikalisch interpretiert. Es folgt eine elementare, aber exakte Darlegung des vom praktischen Standpunkt sehr wichtigen Filtrations- und Extrapolationsproblems stationärer Folgen und stationärer, stochastischer Prozesse. Besonders ausführlich werden dabei die Probleme behandelt, bei denen eine in e^{tr} bzw. in λ rationale Spektraldichte existiert. Zum Verständnis dieses Buches werden lediglich die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die einfachsten Tatsachen aus der Theorie des Hilbertraumes vorausgesetzt.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

In Vorbereitung

Heft 9

HERBERT BENZ

Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

Etwa 224 Seiten — 5 Abbildungen — etwa DM 42,—

Für die Theorie der algebraischen Zahlen gibt es zwei wesentlich verschiedene Begründungsweisen, die idealtheoretische, die auf Dedekind zurückgeht, und die divisorentheoretische, die auf Grund der p-adischen Methode von Hensel entwickelt und dann durch die Bewertungstheorie von Ostrowski u. a. unterbaut wurde.

Die arithmetischen Strukturgesetzlichkeiten ergeben sich dabei durch homomorphe Abbildung der Multiplikativgruppe des algebraischen Zahlkörpers in die Gruppe der zugehörigen Ideale bzw. Divisoren. Diese beiden Methoden hat man auch beim Aufbau der Arithmetik in Algebren herangezogen. Zuerst wurde die Arithmetik in algebraischen Algebren idealtheoretisch durch Brandt, Artin u. a. begründet. Hasse hat dann gezeigt, daß sich die arithmetischen Strukturgesetzlichkeiten des Idealgruppoids (der arithmetischen Rechts- und Linksideale in bezug auf die Maximalordnungen einer algebraischen Algebra) einfacher und durchsichtiger herleiten lassen, wenn man sich der p-adischen Methode bedient, aber im Gegensatz zur Theorie der algebraischen Zahlen ist hier ein divisorentheoretischer Aufbau der Arithmetik nicht erfolgt. Auch bei der Hasseschen Begründung der Arithmetik steht der Idealbegriff im Vordergrund.

In dieser Arbeit wird eine konsequente divisorentheoretische Begründung der Arithmetik (der Maximalordnungen und auch anderer Ordnungen) einer algebraischen Algebra A gegeben und durch eine Bewertungstheorie unterbaut. — Das Buch ist so geschrieben, daß es auch von Nichtkennern der gewöhnlichen Bewertungstheorie gelesen werden kann.

Erscheint voraussichtlich im I. Quartal 1961

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN